电动力学习题课

第六章　狭义相对论

Cheng-Zong Ruan
chzruan@mail.bnu.edu.cn

Department of Astronomy, BNU
December 25, 2018

第六章作业

- 教材第 208 页例题 2、第 221 页例题、第 227 页例题 1
- 第 220 页 (5.20), (5.21), (5.22), (5.23) 式推导
- 第 229 页 (6.28), (6.32) 式推导
- 第六章习题 2-5, 7, 8, 12, 13, 15, 17, 18, 20-22

麻烦而简单的四维时空坐标变换

- 狭义相对论的四维向量（如位移 x^μ、四维速度 u^μ、四维动量 p^μ）在不同惯性系之间的坐标变换（洛伦兹变换）可以用矩阵形式表示。注意这里的四维时空坐标

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (t, x, y, z) \quad (c = 1) ,$$

与教材不同！（教材采用的 $x^4 = ict$ 惯例基本已经没人用了……）

- 最简单的情形：参考系 Σ' 相对于 Σ 系以匀速 $+v$ 沿 x 轴正方向运动，同一个四维向量在 Σ 系的分量 x^μ 与它在 Σ' 系的分量 $x^{\mu'}$ 之间的关系为：

$$\text{从 } \Sigma \text{ 系到 } \Sigma' \text{ 系：} x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}(+v)\, x^\nu , \tag{1}$$

$$\text{洛伦兹变换矩阵：} \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}(+v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

其中采用了自然单位制：$c = 1$。$\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$.

麻烦而简单的四维时空坐标变换

- 参考系 Σ' 相对于 Σ 系以匀速 $+v$ 沿 x 轴正方向运动，同一个四维向量在 Σ 系的分量 x^μ 与它在 Σ' 系的分量 $x^{\mu'}$ 之间的关系为：

$$\text{从 } \Sigma \text{ 系到 } \Sigma' \text{ 系：} \quad x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}(+v)\, x^{\nu} \,, \tag{3}$$

$$\text{洛伦兹变换矩阵：} \quad \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}(+v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{4}$$

$$\text{从 } \Sigma' \text{ 系到 } \Sigma \text{ 系：} \quad x^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'}(-v)\, x^{\nu'} \,, \tag{5}$$

$$\text{洛伦兹变换矩阵：} \quad \Lambda^{\mu}{}_{\nu'}(-v) = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma v & 0 & 0 \\ +\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{6}$$

麻烦而简单的四维时空坐标变换

- 麻烦：算起来超级烦
- 简单：只要算就可以了……
- “君子劳心，小人劳力”
- （劳心的办法见教材习题解答，这里介绍比较繁琐但思路容易的办法）

习题 6.2（两次坐标变换）

- 题目涉及了 3 个惯性系。设 1 尺（Σ' 系）相对于 Σ 系沿 x 轴正向以匀速 $+v$ 运动；2 尺（Σ'' 系）相对于 Σ 系沿 x 轴负向以匀速 $-v$ 运动⋯⋯
- 在狭义相对论时空中，Σ' 和 Σ'' 系的相对速度并非 $2v$ ！
- 要计算“站在一根尺上测量另一根尺的长度”，就是计算 2 尺在 Σ' 系的长度。
- 思路：

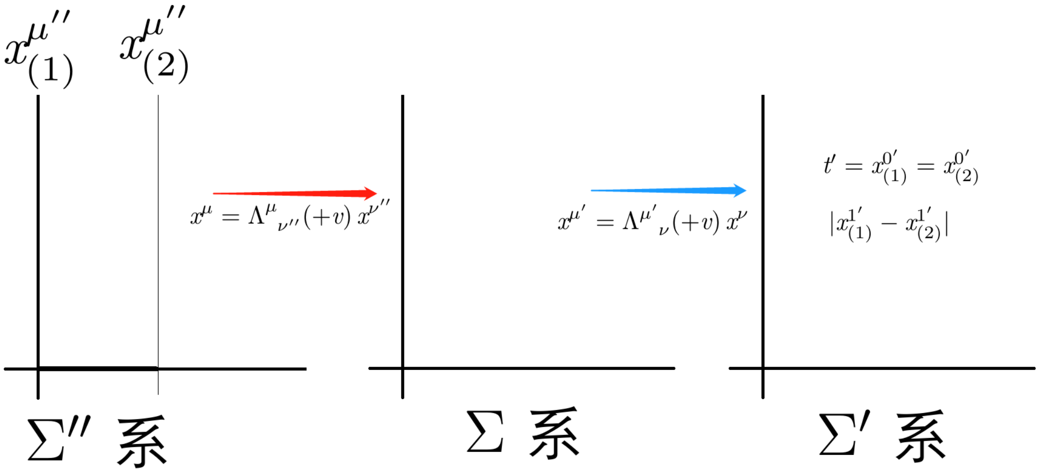
2 尺两端点的四维坐标在 Σ'' 系的分量已知：$x^{\mu''}_{(1)}, x^{\mu''}_{(2)}$

从 Σ'' 系变换到 Σ 系： $x^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu''}(+v)\, x^{\nu''}$

从 Σ 系变换到 Σ' 系： $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}(+v)\, x^{\nu}$

Σ' 系测量的 2 尺长度：相同时刻 $t' = x^{0'}_{(1)} = x^{0'}_{(2)}$ 的空间坐标差 $|x^{1'}_{(1)} - x^{1'}_{(2)}|$

习题 6.2（两次坐标变换）


$x^{\mu''}_{(1)}$
$x^{\mu''}_{(2)}$
$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu''}(+v)\, x^{\nu''}$
$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}(+v)\, x^{\nu}$
$t' = x^{0'}_{(1)} = x^{0'}_{(2)}$
$|x^{1'}_{(1)} - x^{1'}_{(2)}|$
Σ'' 系
Σ 系
Σ' 系

习题 6.2（两次坐标变换）

- 在 2 尺的共动参考系 Σ''，2 尺两个端点的四维时空坐标为

$$x^{\mu''}_{(1)} = (t_1, 0, 0, 0)\ , \quad x^{\mu''}_{(2)} = (t_2, \ell_0, 0, 0)\ .$$

- 从 Σ'' 变换到 Σ 系：（Σ 系相对于 Σ'' 系的速度为 $+v$）

$$x^{\mu}_{(1)} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu''}(+v)\, x^{\nu''}_{(1)} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \ell_0 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} t_1 - v\ell_0 \\ -vt_1 + \ell_0 \end{pmatrix}\ .$$

$$x^{\mu}_{(2)} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu''}(+v)\, x^{\nu''}_{(2)} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -v \end{pmatrix}\ .$$

习题 6.2（两次坐标变换）

- 从 Σ 变换到 Σ' 系：（Σ' 系相对于 Σ 系的速度为 $+v$）

$$x^{\mu'}_{(1)} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}(+v)\, x^{\nu}_{(1)} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} t_1 - v\ell_0 \\ -vt_1 + \ell_0 \end{pmatrix} = \gamma^2 \begin{pmatrix} (1+v^2)t_1 - 2v\ell_0 \\ -2vt_1 + (1+v^2)\ell_0 \end{pmatrix} .$$

$$x^{\mu'}_{(2)} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}(+v)\, x^{\nu}_{(2)} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \gamma t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -v \end{pmatrix} = \gamma^2 t_2 \begin{pmatrix} 1+v^2 \\ -2v \end{pmatrix} .$$

- Σ' 系测量的 2 尺长度：相同时刻 $t' = x^{0'}_{(1)} = x^{0'}_{(2)}$ 的空间坐标差 $|x^{1'}_{(1)} - x^{1'}_{(2)}|$，

$$(1+v^2)t_1 - 2v\ell_0 = t_2(1+v^2) \quad \Rightarrow \quad t_1 - t_2 = \frac{2v\ell_0}{1+v^2}$$

$$|x^{1'}_{(1)} - x^{1'}_{(2)}| = \left|\gamma^2 \left[-2vt_1 + (1+v^2)\ell_0 + 2t_2 v \right]\right| = \boxed{\ell_0 \frac{1-v^2}{1+v^2}} .$$

习题 6.3（一次坐标变换-从火车到地面）

- 地面系 Σ，火车系 Σ'，Σ 系相对于 Σ' 系沿 x 轴以匀速 $-v$ 运动
- 事件 1：小球以匀速 u_0 推出；事件 2：小球到达车厢另一侧；两事件在 Σ' 系的时空坐标为

$$x^{\mu'}_{(1)} = (0, 0, 0, 0)\ , \quad x^{\mu'}_{(2)} = (\ell_0/u_0, \ell_0, 0, 0)\ .$$

- 从 Σ' 系变换到 Σ 系：

$$x^{\mu}_{(1)} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'}(-v)\, x^{\nu'}_{(1)} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & +v \\ +v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,$$

$$x^{\mu}_{(2)} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'}(-v)\, x^{\nu'}_{(2)} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & +v \\ +v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_0/u_0 \\ \ell_0 \end{pmatrix} = \gamma\ell_0 \begin{pmatrix} 1/u_0 + v \\ v/u_0 + 1 \end{pmatrix}\ .$$

- 地面系观测到小球从前到后的运动时间为 $\gamma\ell_0(1/u_0 + v) - 0 = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}} \dfrac{\ell_0}{u_0}(1 + u_0 v)$，

补上因子 c：$\boxed{\dfrac{\ell_0}{u_0\sqrt{1 - v^2/c^2}}(1 + u_0 v/c^2)}$.

习题 6.4（一次坐标变换-从地面到火车）

- 地面系 Σ，火车系 Σ'，Σ' 系相对于 Σ 系沿 x 轴以匀速 $+v$ 运动
- 事件 1：光信号到达前塔；事件 2：光信号到达后塔；两事件在 Σ 系的时空坐标为

$$x^{\mu}_{(1)} = (\ell_0, \ell_0, 0, 0) \ , \quad x^{\mu}_{(2)} = (\ell_0, -\ell_0, 0, 0) \ .$$

- 从 Σ 系变换到 Σ' 系：

$$\begin{aligned} x^{\mu'}_{(1)} &= \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}(+v)\, x^{\nu}_{(1)} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_0 \\ \ell_0 \end{pmatrix} = \gamma \ell_0 (1-v) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \\ x^{\mu'}_{(2)} &= \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}(+v)\, x^{\nu}_{(2)} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_0 \\ -\ell_0 \end{pmatrix} = \gamma \ell_0 (1+v) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

- 火车系观测到两信号的时间差：

$$\gamma \ell_0 (1+v) - \gamma \ell_0 (1-v) = \gamma \ell_0 (2v) = \frac{2 v \ell_0}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{2 v \ell_0}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} \ .$$

习题 6.5

- 第 2 问：在 S-R 装置静止系中，以匀速 v 运动的介质，沿介质运动方向的光速为（教材 P208(2.31) 式上一行）$u = \frac{1/n+v}{1+v/n}$，光的传播时间

$$\Delta t = \frac{\ell_0}{u} = \frac{1 + v/n\ell_0}{1/n + v} \ .$$

- 第 3 问：在液体静止的 Σ' 系中，S-R 装置的运动速度为 $u'_y = -v$，光速 $u' = 1/n$，在 Σ' 系中光从 S 到 R 的传播速度和时间为

$$u'_x = \sqrt{u'^2 - v^2} \ , \quad \Delta t' = \frac{\ell_0}{u'_x} = \frac{n\ell_0}{\sqrt{1 - (nv)^2}} \ .$$

变换到 Σ 系可得

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{1 - v^2} = \frac{n\ell_0 \sqrt{1 - v^2}}{\sqrt{1 - (nv)^2}} \ .$$

习题 6.7（一次坐标变换）

- Σ' 系相对于 Σ 系沿 x 轴做匀速 $+v$ 运动。
- Σ 系中，直尺两个端点的时空坐标为 $x^\mu_{(1)} = (t_1, 0, 0, 0)$，$x^\mu_{(2)} = (t_2, \cos\theta, \sin\theta, 0)$.
- 从 Σ 系变换到 Σ' 系：

$$x^{\mu'}_{(1)} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}(+v)\, x^\nu_{(1)} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma t_1 \\ -\gamma t_1 v \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$x^{\mu'}_{(2)} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}(+v)\, x^\nu_{(2)} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma t_2 - \gamma v \cos\theta \\ -\gamma v t_2 + \gamma\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} .$$

- Σ' 系的同一时刻：$\gamma t_1 = \gamma t_2 - \gamma v \cos\theta \to t_1 - t_2 = -v\cos\theta$
- Σ' 系观测到的夹角 $\tan\theta' = \dfrac{y'_{(1)} - y'_{(2)}}{x'_{(1)} - x'_{(2)}} = \dfrac{\sin\theta - 0}{-\gamma v t_2 + \gamma\cos\theta - (-\gamma t_1 v)} = \dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1-v^2}}$.

习题 6.8（一次坐标变换）

- Σ 系中：点 (x, y, z) 的时空坐标为 $x^\mu = (t, x, y, z)$
- 从 Σ 系变换到 Σ' 系：

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu x^\nu = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} t - vx \\ -tv + x \end{pmatrix},$$

令 $t' = t$，即 $\gamma(t - vx) = t$，解得 $t = \dfrac{\gamma vx}{\gamma - 1} = \dfrac{x}{v}(1 + \sqrt{1 - v^2})$.

- $x' = \gamma(-tv + x) = \gamma \left[-v\dfrac{x}{v}(1 + \sqrt{1 - v^2}) + x \right] = -x.$

习题 6.12（电磁势的一次坐标变换）

- 在电偶极子的共动参考系 Σ' 中，电磁势、电磁场就是简单的静电/磁场：

$$\varphi' = \frac{\boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{R}'}{4\pi\varepsilon_0 R'^3} \ , \quad \boldsymbol{A}' = 0 \ ,$$

  四维电磁势 $A^{\mu'} = (\varphi', \boldsymbol{A}') = (\varphi', 0, 0, 0)$. 其中 $\boldsymbol{R'} = (x', y', z') = x'\,\boldsymbol{e}'_x + y'\,\boldsymbol{e}'_y + z'\,\boldsymbol{e}'_z$.

- Σ 系相对于 Σ' 系沿 x 轴以匀速 $-v$ 运动，四维电磁势在 Σ' 系的分量与 Σ 系分量的关系为

$$A^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'}(-v)\, A^{\nu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma\varphi' \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

  由此可得 $\varphi = \gamma\varphi', A^x = \gamma v\varphi'$, 其中 φ' 需要用 Σ 系的分量表示：

$$A^x = \gamma v \varphi' = \gamma v \frac{\boldsymbol{p}_0 \cdot \widetilde{\boldsymbol{R}}}{4\pi\varepsilon \widetilde{R}^3} \ , \quad \widetilde{\boldsymbol{R}} = \gamma x \boldsymbol{e}_x + y \boldsymbol{e}_y + z \boldsymbol{e}_z \ .$$

习题 6.13（电磁场的一次坐标变换）

- （带入电磁场变换公式 (5.24) 即可，略）

习题 6.15（电磁场的一次坐标变换）

- （带入电磁场变换公式 (5.24) 即可，略）

习题 6.17（能量动量守恒）

- 能量守恒： $m=\sqrt{p_1^2+m_1^2}+\sqrt{p_2^2+m_2^2}$
- 动量守恒： $0=\boldsymbol{p_1}+\boldsymbol{p}_2 \ \Rightarrow \ p_1^2=p_2^2$
- 已知 m, m_1, m_2
- 两个方程，两个未知数 p_1, p_2
- 解得

$$E_1=\frac{m^2+m_1^2-m_2^2}{2m}, \quad p_1=\frac{\sqrt{\left[m^2-(m_1+m_2)^2\right]\left[m^2-(m_1-m_2)^2\right]}}{2m}.$$

习题 6.18（能量动量守恒）

- (与上一题同理……)

习题 6.20（四维动量守恒）

- 两个粒子组成的系统，已知这两个粒子在实验室系的质量与能量……
- 第一问：求该系统的动量中心系（以下称质心系）Σ' 相对于实验室系 Σ 的速度 β.
- 粒子 1/2 的四维动量在 Σ 系的分量为

$$p^{\mu}_{(1)} = \left(E_1, \sqrt{E_1^2 - m_1^2}, 0, 0\right) \ , \quad p^{\mu}_{(2)} = (m_2, 0, 0, 0) \ .$$

- 从 Σ 系变换到 Σ' 系：

$$p^{\mu'}_{(1)} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}(\beta)\, p^{\nu}_{(1)} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ \sqrt{E_1^2 - m_1^2} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} E_1 - \beta\sqrt{E_1^2 - m_1^2} \\ -\beta E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2} \end{pmatrix}$$

$$p^{\mu'}_{(2)} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}(\beta)\, p^{\nu}_{(2)} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma m_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix} \ .$$

习题 6.20（四维动量守恒）

- 从 Σ 系变换到 Σ' 系:

$$p^{\mu'}_{(1)} = \gamma \begin{pmatrix} E_1 - \beta\sqrt{E_1^2 - m_1^2} \\ -\beta E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2} \end{pmatrix}, \quad p^{\mu'}_{(2)} = \gamma m_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix}.$$

- 质心系 Σ' 中，总动量的空间分量为零:

$$\gamma\left(-\beta E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2}\right) + \gamma m_2(-\beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2}}{E_1 + m_2}}.$$

习题 6.20（四维动量守恒）

- 第二问：Σ' 系中粒子的动量、能量及总能量，即粒子四动量在 Σ' 系的分量

$$p_{(1)}^{\mu'} = \gamma \begin{pmatrix} E_1 - \beta\sqrt{E_1^2 - m_1^2} \\ -\beta E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2} \end{pmatrix} , \quad p_{(2)}^{\mu'} = \gamma m_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix} .$$

- 粒子 1 的能量 $E'_{(1)} = p_{(1)}^{0'} = \dfrac{1}{1-\sqrt{1-\beta^2}}\left[E_1 - \beta\sqrt{E_1^2 - m_1^2}\right]$，其中 $1/\sqrt{1-\beta^2} = \dfrac{E_1 + m_2}{M}$, $M \equiv \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2}$，带入得到

$$E'_{(1)} = \frac{m_1^2 + m_2 E_1}{M} .$$

- 粒子 2 的能量 $E'_{(2)} = p_{(2)}^{0'} = \dfrac{m_2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{m_2(E_1 + m_2)}{M} .$

习题 6.20（四维动量守恒）

- 第二问：Σ' 系中粒子的动量、能量及总能量，即粒子四动量在 Σ' 系的分量

$$p_{(1)}^{\mu'} = \gamma \begin{pmatrix} E_1 - \beta\sqrt{E_1^2 - m_1^2} \\ -\beta E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2} \end{pmatrix}, \quad p_{(2)}^{\mu'} = \gamma m_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix}.$$

- 粒子 1 的动量 $p'_{(1)} = \sqrt{(p_{(1)}^{1'})^2 + (p_{(2)}^{2'})^2 + (p_{(1)}^{3'})^2} = p_{(1)}^{1'} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(-\beta E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2}\right) = \dfrac{m_2\sqrt{E_1^2 - m_1^2}}{M}$
- 粒子 2 的动量 $p'_{(2)} = -p'_{(1)}$（质心系的定义）

习题 6.20（四维动量守恒）

- 第三问：质量 m_1 的高能粒子碰撞静止靶粒子 m_2，$E_1 \gg m_1, m_2$，由此可得
$$
{E_1'}^2 \approx \frac{E_1 m_2}{2} \quad \Rightarrow \quad E_1 \approx \frac{2{E_1'}^2}{m_2},
$$
将 $m_2 = m_e = 0.511\,\mathrm{MeV}, E_1' = 2.2\,\mathrm{GeV}$ 带入得到 $E_1 \approx 1.9 \times 10^4\,\mathrm{GeV}$.

习题 6.21

- 解方程 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}$,

$$左侧:\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2}}\right], \qquad 右侧:\ F = qE.$$

- 积分上式解出 $v(t)$，再积分解出位移……
- （详见答案书）

习题 6.22（坐标变换消去磁场）

- $E > cB$, 可以通过坐标变换消去磁场（习题 6.13)
- 粒子的共动参考系 Σ' 中磁场为零，电场为

$$E'_x = \gamma(E - uB) = \frac{E}{\gamma} \,, \quad E'_y = 0 \,, \quad E'_z = 0 \,.$$

- Σ' 系中：粒子在静电场中运动，同上一题，运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}p'_x}{\mathrm{d}t'} = qE'_x \,, \quad \frac{\mathrm{d}p'_y}{\mathrm{d}t'} = 0 \,, \quad \frac{\mathrm{d}p'_z}{\mathrm{d}t'} = 0 \,.$$

- 解得 $x'(t'), y'(t'), z'(t')$，再由洛伦兹变换回到 $x(t), y(t), z(t)$.

狭义相对论中的向量分析/动力学/电动力学

- A First Course in GR, Bernard Schutz, 2nd ed., chapter 2.
  中译（未完成）：`https://pan.bnu.edu.cn/l/uoaCzN`
- Introduction to Electrodynamics, David Griffiths, 4th ed., chapter 12