电动力学习题课

第二章　静电场

Cheng-Zong Ruan

chzruan@mail.bnu.edu.cn

Department of Astronomy, BNU

October 16, 2018

第二章作业

- 教材第 2.1 节例题 1-3， 2.3 节例题 3.
- 讲义http://astrowww.bnu.edu.cn/sites/hubin/bh_bnu_homepage/teaching/ED_lecture2.pdf 第 24/25 页电势 φ 绘图.
- 教材 2.4 节例题 2/3， 2.5 节例题.
- 教材第二章习题 1-6, 8-14, 16, 18.

分离变量法

- 没有自由电荷区域的电势 φ、拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi = 0$ 的轴对称通解:

$$\varphi(R,\theta) = \sum_n \left(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta) \ ,$$

寻找边界条件确定系数 a_n, b_n.

- **例题 2.1** （空心带电导体球壳包围着接地导体球）：
  - 无自由电荷区域：$R_1 < R < R_2; R > R_3$
  - 电荷局域分布（没有无穷大的带电体）——$\varphi|_{R\to\infty} = 0$;
  - 导体球接地——$\varphi|_{\text{导体球}} = 0$;
  - 球壳的（自由）电荷量已知为 Q——$Q/\varepsilon_0 = \oint_{\text{表面}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{\text{表面}} (-\nabla\varphi)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 已知

分离变量法

- **例题 2.2** （均匀介质球置于匀强外电场）：
  - 无自由电荷区域：全空间!
  - 无穷远处电势的渐进行为已知——$\varphi|_{R\to\infty}=$ 匀强电场的电势 $=-E_0RP_1(\cos\theta)$;
  - $R=0$ 处电势不发散——杀死 $1/R^{n+1}$ 项;
  - 介质-真空界面处的衔接条件——$\varphi|_{R_0^-}=\varphi|_{R_0^+}$; $\varepsilon\#\%\#\$\%\#$ （教材 (2.2) 式）。
- **例题 2.3** （接地导体球置于匀强外电场）：
  - 无自由电荷区域：全空间!
  - 无穷远处电势的渐进行为已知——$\varphi|_{R\to\infty}=$ 匀强电场的电势 $=-E_0RP_1(\cos\theta)$;
  - $R=0$ 处电势不发散——杀死 $1/R^{n+1}$ 项;
  - 导体-真空界面处的衔接条件——$\varphi|_{R_0}=\text{const.}$; $\varepsilon\partial\varphi/\partial n=-\sigma$。

分离变量法

- **习题 2.2(1)** （接电池的均匀导体球置于匀强外电场）：
  - 无自由电荷区域：全空间！
  - 无穷远处电势的渐进行为已知——$\varphi|_{R\to\infty} = -E_0 R P_1(\cos\theta) + \varphi_0$；
  - （$R = 0$ 处是导体内、电势为常量）；
  - 导体-真空界面处的衔接条件（导体接电池电势已知）——$\varphi|_{R_0} = \Phi_0$.
- **习题 2.2(2)** （电荷量已知的均匀导体球置于匀强外电场）：
  - 无自由电荷区域：$R > R_0$
  - 无穷远处电势的渐进行为已知——$\varphi|_{R\to\infty} =$ 匀强电场的电势 $= -E_0 R P_1(\cos\theta)$；
  - 导体球的（自由）电荷量已知——$Q = \oint_{\text{表面}} \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{R=R_0} (-\varepsilon_0 \nabla\varphi)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 已知
  - 导体-真空界面处的衔接条件——$\varphi|_{R_0} = \text{const.} \equiv \Phi_0$.

分离变量法

- **习题 2.3** (中心有点电荷的均匀介质球):
  - **新的套路:** 总电势 = 自由电荷电势 + 极化电荷电势，$\varphi_{\text{tot}} = \frac{Q_f}{4\pi\varepsilon R} + \varphi'$ （本题的自由电荷电势容易求）; $\nabla^2\varphi' = 0$
  - 无自由电荷区域：全空间（除了原点）！分为介质球内 (φ_1) 外 (φ_2);
  - 原点处有电偶极子——$\varphi_1|_{R\to 0} = \infty$;
  - 无穷远处电势的渐进行为已知——$\varphi_2|_{R\to\infty} = 0$;
  - 介质-真空界面处的衔接条件——

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \quad \text{at } R = R_0 \ .$$

分离变量法

- 习题 2.4 （中心有电偶极子的均匀介质球）：
  - 总电势 = 电偶极子电势 + 极化电荷电势，$\varphi_{\text{tot}} = \frac{\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_1 R^3} + \varphi'$ （本题的自由电荷电势容易求）；$\nabla^2 \varphi' = 0$
  - 无自由电荷区域：全空间（除了原点）！分为介质球内 (φ_1') 外 (φ_2')；
  - 原点处有电偶极子——$\varphi_1|_{R\to 0} = \infty$；
  - 无穷远处电势的渐进行为已知——$\varphi_2|_{R\to\infty} = 0$；
  - 介质-真空界面处的衔接条件——

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \quad \text{at } R = R_0 \ .$$

- 极化电荷面密度

$$\sigma_p = \varepsilon_0 \hat{\boldsymbol{R}} \cdot (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = \varepsilon_0 \hat{\boldsymbol{R}} \cdot (-\nabla \varphi_2 - (-\nabla \varphi_1)) \ .$$

分离变量法

- **习题 2.5** （中心有电偶极子、带电荷量已知为 Q 的空心导体球壳）：
  - 总电势 = 电偶极子电势 + 极化电荷电势，$\varphi_{\text{tot}} = \frac{\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_1 R^3} + \varphi'$ （本题的自由电荷电势容易求）；$\nabla^2\varphi' = 0$
  - 无自由电荷区域：$0 < R < R_1, R > R_2$；
  - 原点处有电偶极子——$\varphi|_{R\to 0} = \infty$；
  - 无穷远处电势的渐进行为已知——$\varphi|_{R\to\infty} = 0$；
  - 导体-真空界面的衔接条件——$\varphi_1 = \varphi_2$
  - 球壳的（自由）电荷量已知为 Q——$Q/\varepsilon_0 = \oint_{\text{表面}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{\text{表面}} (-\nabla\varphi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 已知

分离变量法

- **习题 2.6** （均匀电场中、均匀带电的介质球）：
  - 总电势 = 自由电荷电势 + 极化电荷电势；本题的自由电荷电势可解！
  $$\varphi_1^{\rm tot}=\varphi_1^f+\varphi_1' \ (R<R_0); \quad \varphi_2^{\rm tot}=\varphi_2^f+\varphi_2' \ (R>R_0) \ .$$
  - $\nabla^2\varphi_1'=0 \ (R<R_0); \quad \nabla^2\varphi_2'=0 \ (R>R_0);$
  - 球对称的自由电荷电势解：
  $\varphi_1^f=\frac{\rho_f}{6\varepsilon}(R_0^2-R^2)+\frac{\rho_f R_0^2}{3\varepsilon_0} \ (R<R_0); \quad \varphi_2^f=\frac{\rho_f R_0^3}{3\varepsilon_0 R} \ (R>R_0)$； （推导？）
  - $R=0$ 处电势有限——$\varphi_1|_{R=0}=$ 有限值；
  - 无穷远处电势的渐进行为已知——$\varphi_2|_{R\to\infty}=-E_0RP_1(\cos\theta)$；
  - 介质-真空界面 $R=R_0$ 的衔接条件——
  $$\varphi_2=\varphi_1 \ , \quad \varepsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}=\varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial R} \ .$$

分离变量法 - 习题 2.6

- 轴对称通解（已经考虑了 $R=0$ 与 $R\to\infty$ 处解的行为）：

$$R<R_0: \quad \varphi_1=\frac{\rho_f}{6\varepsilon}(R_0^2-R^2)+\frac{\rho_f R_0^2}{3\varepsilon_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^nP_n(\cos\theta) \tag{1}$$

$$R>R_0: \quad \varphi_2=\frac{\rho_f R_0^3}{3\varepsilon_0 R}-E_0RP_1(\cos\theta)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta) \tag{2}$$

- 将衔接条件 $\varphi_1|_{R=R_0}=\varphi_2|_{R=R_0}$ 带入得到：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR_0^nP_n=-E_0RP_1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{R_0^{n+1}}P_n \tag{3}$$

分离变量法 - 习题 2.6

- 将衔接条件 $\varphi_1|_{R=R_0} = \varphi_2|_{R=R_0}$ 带入得到:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_0^n P_n = -E_0 R P_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{R_0^{n+1}} P_n \tag{4}$$

  - P_1 项: $a_1 R_0 = -E_0 R_0 + \frac{d_1}{R_0^2}$;
  - $P_n (n = 0, 2, 3, 4, \dots)$ 项: $a_n R_0^n = \frac{d_n}{R_0^{n+1}}$.

分离变量法 - 习题 2.6

- 将衔接条件 $\varepsilon_0 \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}\right|_{R_0} = \varepsilon \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}\right|_{R_0}$ 带入得到:

$$\varepsilon\left[-\frac{\rho_f R_0}{3\varepsilon}+\sum_{n=1}^{\infty} n a_n R_0^{n-1} P_n\right]=\varepsilon_0\left[-\frac{\rho_f R_0}{3\varepsilon_0}-E_0 P_1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)d_n}{R_0^{n+2}}P_n\right] \tag{5}$$

- P_0 项: $d_0=0$;
- P_1 项: $\varepsilon a_1=\varepsilon_0\left[-\frac{2d_1}{R_0^3}-E_0\right]$
- $P_n(n\geq 2)$ 项: $\varepsilon n a_n R_0^{n-1}=-\frac{\varepsilon_0(n+1)d_n}{R_0^{n+2}}$.

分离变量法 - 习题 2.6

- P_0 项：$a_0 = d_0/R_0$;
- P_1 项：$a_1 R_0 = -E_0 R_0 + \dfrac{d_1}{R_0^2}$;
- $P_n(n \geq 2)$ 项：$a_n R_0^n = \dfrac{d_n}{R_0^{n+1}}$.

- P_0 项：$d_0 = 0$;
- P_1 项：$\varepsilon a_1 = \varepsilon_0 \left[-\dfrac{2d_1}{R_0^3} - E_0\right]$
- $P_n(n \geq 2)$ 项：
  $\varepsilon n a_n R_0^{n-1} = -\dfrac{\varepsilon_0 (n+1) d_n}{R_0^{n+2}}$.

$$a_0 = d_0 = 0; \quad a_1 = -\frac{3\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}; \quad d_1 = E_0 R_0^3 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}$$

$$a_n = d_n = 0 \ (n \geq 2)$$

分离变量法

- “学过偏微分方程吗?”

  “学过（在数学物理方法课上）”

- “*Sobolev* 空间是啥?”

  “呃···其实没学过偏微分方程，只学过分离变量法···”

- “那好吧，请问为什么 *Sturm-Liouville* 型 *ODE* 的本征函数系是正交的?”

  “呃···其实我只会解系数······”

- “没关系，没关系，请说一下解系数的时候用广义幂级数展开的适用条件?”

  “呃······其实解系数我也不大会······”

作者：*Tony Shi*；`https://www.zhihu.com/question/269693413/answer/503981850`；略有改动

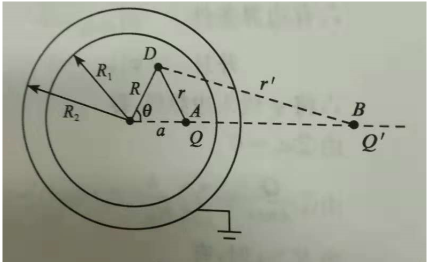
电像法

- 求解点电荷在部分空间区域 $\mathcal{V}$ 的电势
- 区域 $\mathcal{V}$ 的边界条件比较简单
- (例: $\varphi|_{\text{导体板}} = \text{const.}$、$\varphi|_{\text{接地导体板}} = 0$)
- 寻找位于区域 $\mathcal{V}$ 之外合适位置的镜像电荷 (电像), 使得电像 + 区域内电荷产生相同的边界条件
- 唯一性定理: 同一个边界条件、同一个电场

电像法 - 习题 2.9

9. 接地的空心导体球的内外半径为 R_1 和 R_2，在球内离球心为 $a(a<R_1)$处置一点电荷 Q. 用镜像法求电势. 导体球上的感应电荷有多少？分布在内表面还是外表面？

- 区域：球状区域 $0 < r < R_1$
- 边界条件：$\varphi|_{r=R_1} = 0$
- 在区域外（$r > R_1$）寻找像电荷。。



解 2—9 图

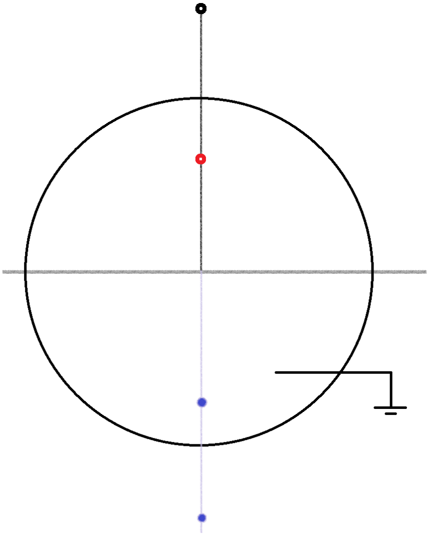
摘自《电动力学（第三版）全程导学及习题全解》，金硕 等 编著，中国时代经济出版社，第 *58* 页

电像法 - 习题 2.10

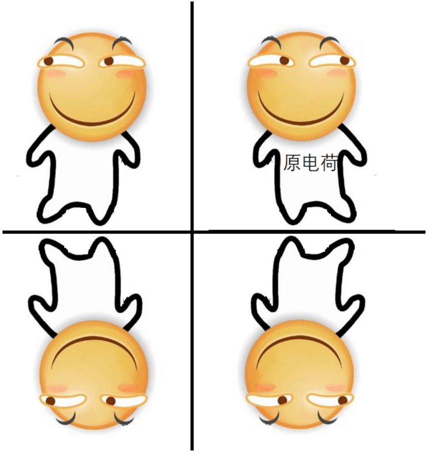
- 习题 2.10 第一问（导体球壳带总电荷 Q_0）
  - 区域：球状区域 $0 < r \leq R_1$ （$R_1 < r < R_2$ 处导体电势恒定；$r > R_2$ 处电势容易计算（球对称分布））
  - 边界条件：$\varphi|_{r=R_1} = \frac{Q+Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$ （未知常量）；
  - 在区域外（$r > R_1$）寻找像电荷。
- 习题 2.10 第二问（导体球壳电势固定为 φ_0）
  - 区域：球状区域 $0 < r \leq R_1$ （$R_1 < r < R_2$ 处导体电势恒定；$r > R_2$ 处电势容易计算（球对称分布））
  - 边界条件：$\varphi|_{r=R_1} = \varphi_0$ （未知常量）；
  - 在区域外（$r > R_1$）寻找像电荷。

电像法 - 习题 2.11

- 半球状凸起的接地导体板 = 接地导体板 + 接地导体球
- 真实电荷（黑）+ 真实电荷在导体球的像电荷（红）+ 真实电荷、真实电荷在导体球的像电荷在导体板的像电荷（蓝 $\times 2$）



电像法 - 习题 2.12



习题 2.16

$$\varphi = \int_V \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}') \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \mathrm{d}V'$$

另外，根据极化电荷公式 $\rho_P = -\nabla' \cdot \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}')$ 及 $\sigma_P = \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{P}$，极化介质所产生的电势又可表为

$$\varphi = -\int_V \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{4\pi\varepsilon_0 r} \mathrm{d}V' + \oint_S \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}') \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

试证明以上两表达式是等同的.

【证】 由高斯定理，(2)式右边第二项面积分可化为

$$\oint_S \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}') \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int_V \nabla' \cdot \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{4\pi\varepsilon_0 r} \mathrm{d}V'$$

$$= \int_V \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{4\pi\varepsilon_0 r} \mathrm{d}V' + \int_V \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}') \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \mathrm{d}V' \qquad (3)$$

其中已利用到 $\nabla'(1/r) = \boldsymbol{r}/r^3$，将(3)代入(2)式，即得(1)式.

分离变量法 - 习题 2.18

上半球电势 φ_0、下半球电势 $-\varphi_0$ 的奇怪球面

- 无自由电荷区域：全空间（分为球内 φ_1 和球外 φ_2）！
- $R = 0$ 处电势有限——$\varphi_1|_{R=0} =$ 有限值；
- 无穷远处电势的渐进行为已知——$\varphi_2|_{R\to\infty} = 0$；
- 上/下半球面 $R = R_0, \theta >$ or $< \pi/2$ 的边界条件——

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0 \ (0 < \theta < \pi/2); \quad \varphi_1 = \varphi_2 = -\varphi_0 \ (\pi/2 < \theta < \pi) \ .$$

- 轴对称通解：$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n P_n \ ; \quad \varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n$；
- ... （课堂推导）