电动力学习题课

第一章

Cheng-Zong Ruan

Department of Astronomy, BNU

September 26, 2018

第一章作业

- 从静电场麦克斯韦方程的积分形式 $\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}=0$ 推导微分形式 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$（静电场无旋）.
- 从毕奥-萨法尔定律 (2.8) 式推导磁场旋度和散度公式 (2.11)、(2.13) 式。
- 教材第一章习题 1-7, 9, 10.

分量形式

“我知道有几位中国同学曾经试考过最低标准，但没有人真正通过。于是稍事准备后就打电话到朗道家里。考试定在 11 月 11 日上午，在物理问题研究所理论室朗道自己的房间里。(……中略） 记得有一道题是要简化一个比较复杂的矢量分析表达式。由于我的数学知识基本上源于自学，解题实践不足，于是采取了最有把握的办法，把矢量关系全部用单位对称和反称张量写出来，再按爱因斯坦规则缩并指标。朗道看到以后，大笑了几声，告诉我怎样走捷径。”

——郝柏林. 朗道百年. 《物理》, 2008(09):666-671.

要用的公式

- 证明向量/张量等式 $\Leftrightarrow$ 证明等号两边向量/张量的分量相等
- （以下的分量默认是向量在直角坐标系中的）
- $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\sum_{i=1}^{3}A_iB_i=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}A_iB_j \underbrace{=}_{\text{Einstein Convention}} \delta_{ij}A_iB_j=A_jB_j;$

  Kronecker（克罗内克）符号 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}.$
- $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix},\quad [\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]_i=\varepsilon_{ijk}A_jB_k$
- ε_{ijk}: 单位反对称张量。$ijk=123,231,312:\varepsilon_{ijk}=1$;
  $ijk=132,213,321:\varepsilon_{ijk}=-1$; 其他情况（例如 ε_{113}、ε_{333}）$\varepsilon_{ijk}=0.$

要用的公式

- （以下的分量默认是向量在直角坐标系中的）
- Einstein Convention：$\sum_{i=1}^{3} A_i B_i \equiv A_i B_i$（重复指标代表求和）
- $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_j B_j$
- $\delta_{ij} A_j = A_i$
- $[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}]_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$
- $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$
- $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{\ell mk} = \delta_{i\ell} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{j\ell}$

分量形式

习题 1.1

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

- $\left[\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\right]_i = \varepsilon_{ijk}B_j(\nabla\times\boldsymbol{A})_k = \varepsilon_{ijk}B_j\varepsilon_{k\ell m}(\partial_\ell A_m) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\ell mk}B_j(\partial_\ell A_m) = (\delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell})B_j(\partial_\ell A_m) = \boxed{B_m(\partial_i A_m) - B_\ell(\partial_\ell A_i)}$
- $\left[(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\right]_i = (B_j\partial_j)A_i = \boxed{B_j(\partial_j A_i)}$
- $\left[\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})\right]_i = \varepsilon_{ijk}A_j\varepsilon_{k\ell m}(\partial_\ell B_m) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\ell mk}A_j(\partial_\ell B_m) = (\delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell})A_j(\partial_\ell B_m) = \boxed{A_m(\partial_i B_m) - A_\ell(\partial_\ell B_i)}$
- $\left[(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\right]_i = (A_j\partial_j)B_i = \boxed{A_j(\partial_j B_i)}$

分量形式

习题 1.1

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

$$\begin{aligned}
\left[\mathsf{RHS}\right]_i &= B_m(\partial_i A_m) - \cancel{B_\ell(\partial_\ell A_i)} + \cancel{B_j(\partial_j A_i)} + A_m(\partial_i B_m) - \cancel{A_\ell(\partial_\ell B_i)} + \cancel{A_j(\partial_j B_i)} \\
&= B_m(\partial_i A_m) + A_m(\partial_i B_m) \\
&= \partial_i(A_m B_m) \\
&= \left[\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\right]_i
\end{aligned}$$

分量形式

习题 1.2

$$\boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}\nabla(A^2) - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}$$

$$\begin{aligned}
\left[\boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})\right]_i &= \varepsilon_{ijk} A_j (\nabla \times \boldsymbol{A})_k \\
&= \varepsilon_{ijk} A_j \varepsilon_{k\ell m} (\partial_\ell A_m) = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{\ell mk} A_j (\partial_\ell A_m) \\
&= (\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}) A_j (\partial_\ell A_m) = A_m(\partial_i A_m) - A_\ell(\partial_\ell A_i) \\
&= \frac{1}{2}\partial_i (A_m A_m) - A_\ell(\partial_\ell A_i) \\
&= \left[\frac{1}{2}\nabla(A^2) - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}\right]_i
\end{aligned}$$

分量形式

习题 2

$$\nabla f(u) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u\,; \quad \nabla\cdot\boldsymbol{A}(u) = \nabla u\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}$$

$$\left[\nabla f(u)\right]_i = \partial_i f(u) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\partial_i u = \left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u\right]_i$$

$$\left[\nabla\cdot\boldsymbol{A}(u)\right]_i = \partial_i A_j(u) = \frac{\mathrm{d}A_i(u)}{\mathrm{d}u}\partial_i u = (\nabla u)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}$$

分量形式

习题 2

$$\nabla \times \boldsymbol{A}(u) = \nabla u \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}$$

$$\begin{aligned}
\left[\nabla \times \boldsymbol{A}(u)\right]_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k(u) = \varepsilon_{ijk}\frac{\mathrm{d}A_k}{\mathrm{d}u}(\partial_j u) \\
&= \varepsilon_{ijk}(\nabla u)_j \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}\right)_k \\
&= \left[(\nabla u) \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}\right]_i
\end{aligned}$$

分量形式

习题 3.1

$$\nabla r = -\nabla' r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$r \equiv |\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| = \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}$$

$$\left[\nabla r\right]_x = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}[\text{♂♂♂}]^{-1/2} 2(x-x') = \frac{x-x'}{r} = \frac{\left[\boldsymbol{r}\right]_x}{r}$$

$$\left[\nabla' r\right] = \frac{\partial r}{\partial x'} = \cdots$$

$\nabla \frac{1}{r}$同理……

分量形式

习题 3.1

$$\nabla \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{r}}/(r^2 \sin\theta) & \hat{\boldsymbol{\theta}}/r\sin\theta & \hat{\boldsymbol{\varphi}}/r \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ A_r & rA_\theta & rA_\varphi \sin\theta \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{r}}/(r^2 \sin\theta) & \hat{\boldsymbol{\theta}}/r\sin\theta & \hat{\boldsymbol{\varphi}}/r \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ r^{-2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

分量形式

习题 3.1

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=-\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0\quad(r\neq 0);\qquad\left(\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=4\pi\,\delta^3(\boldsymbol{r})\right)$$

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{1}{r^2}\right)=0\qquad\text{（在 }r=0\text{ 处不成立）}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V&=\oint_{\mathcal{S}}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\quad\text{(散度定理)}\\&=\int\left(\frac{1}{R^2}\hat{\boldsymbol{r}}\right)\cdot(R^2\sin\theta\mathrm{d}\varphi\hat{\boldsymbol{r}})=\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=4\pi\end{aligned}$$

分量形式

习题 3.2

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r},\nabla\times\boldsymbol{r},(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r},\ldots,\nabla\times\left[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\right]$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{r} &= \partial_i r_i = 3\\
\left[(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}\right]_i &= (a_j\partial_j)r_i = a_j\delta_{ij} = a_i\\
\Big(\nabla\times\left[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\right]\Big)_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j\left[E_k\sin(k_\ell r_\ell)\right] = \varepsilon_{ijk}\left[E_k\partial_j\sin(k_\ell r_\ell)\right]\\
&= \varepsilon_{ijk}E_k\left[\cos(k_\ell r_\ell)k_j\right] = \varepsilon_{ijk}k_jE_k\cos(k_\ell r_\ell)\\
&= \left[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\right]_i
\end{aligned}$$

分量形式

习题 4.1

应用高斯定理证明 $\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}V \nabla \times \boldsymbol{f} = \oint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{f}$

- 高斯定理（散度定理）: $\int \mathrm{d}V \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$. （向量场的散度的体积分 ~ 自身的面积分）
- 配凑散度的体积分：考虑任意的常矢量场 $\boldsymbol{c}$,

$$\boxed{\boldsymbol{c} \cdot \int \mathrm{d}V \nabla \times \boldsymbol{f}} = \int \mathrm{d}V \nabla \cdot (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{c}) = \oint (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{c}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boxed{\oint (\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{c}}$$

$$\Rightarrow \int \mathrm{d}V \nabla \times \boldsymbol{f} = \oint \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{f}$$

分量形式

习题 4.1

应用高斯定理证明 $\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\, V \nabla \times \boldsymbol{f} = \oint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{f}$

- 配凑散度的体积分：考虑任意的常矢量场 $\boldsymbol{c}$,

$$\boldsymbol{c} \cdot \int \mathrm{d}\, V \nabla \times \boldsymbol{f} = \int \mathrm{d}\, V \nabla \cdot (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{c}) = \oint (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{c}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint (\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{c}$$

$$\Rightarrow \int \mathrm{d}\, V \nabla \times \boldsymbol{f} = \oint \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{f}$$

- $\boldsymbol{c} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{f}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{c})$（课堂推导）

分量形式

习题 4.2

应用斯托克斯定理证明 $\int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \nabla\varphi = \oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\,\varphi$.

- 斯托克斯定理：$\oint_L \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$. （向量场的旋度的面积分 ~ 自身的环积分）
- 配凑旋度的面积分：考虑任意的常矢量场 $\boldsymbol{a}$,

$$\int_S [\nabla \times (\varphi \boldsymbol{a})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int (\nabla\varphi \times \boldsymbol{a}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a} \cdot \boxed{\int \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \nabla\varphi},$$

另一方面，$$\int_S [\nabla \times (\varphi \boldsymbol{a})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_L \varphi \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{a} \cdot \boxed{\int \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\varphi}.$$

分量形式

习题 5

利用电荷密度的连续性方程推导电荷系统偶极矩

$$\boldsymbol{p}(t) = \int_V \rho(\boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{x}\, \mathrm{d}\, V$$

的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t) \mathrm{d}\, V$$

.

分量形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho(\boldsymbol{x},t)\,\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\,V=\int\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\,V=-\int(\nabla\cdot\boldsymbol{J})\,\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\,V\,,$$

考虑上式的 x 分量（y,z 分量同理）:

$$\begin{aligned}
-\int_V(\nabla\cdot\boldsymbol{J})\,x\,\mathrm{d}\,V&=-\left[\int\nabla\cdot(x\boldsymbol{J})\mathrm{d}\,V-\int\underbrace{\boldsymbol{J}\cdot(\nabla x)}_{=J_x}\mathrm{d}\,V\right]\\
&=-\left[\cancel{\oint_S x\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}-\int J_x\mathrm{d}\,V\right]=\int J_x\,\mathrm{d}\,V\\
\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}&=\int\boldsymbol{J}\mathrm{d}\,V\,.
\end{aligned}$$

分量形式

习题 6

推导 $\nabla\times\left(\boldsymbol{m}\times\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right)=-\nabla\left(\boldsymbol{m}\cdot\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right)$.

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\nabla\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{a}-(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b}$$

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{m}\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right)=\cancel{\left(\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right)}\boldsymbol{m}-(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}=-(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

$$\nabla\left(\boldsymbol{m}\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right)=\cancel{\boldsymbol{m}\times\left(\nabla\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right)}+(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\ .$$

分量形式

习题 7

(球对称电荷分布，高斯面选择为球面，高斯定律的最简单应用情形……)

分量形式

习题 9

推导均匀介质内部的极化电荷密度 ρ_P 与自由电荷密度 ρ_f 的关系为 $\rho_P = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\rho_f$.

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} = -\nabla \cdot (\boldsymbol{D} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E}) = -\rho_f + \varepsilon_0 \nabla \cdot (\boldsymbol{D}/\varepsilon) = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\rho_f \,.$$

分量形式

习题 10

证明两个闭合的恒定电流圈之间的相互作用力大小相等，方向相反。

- 电圈 1 产生磁场 $\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{x})$（毕奥-萨法尔公式）作用于电圈 2 产生作用力 $\boldsymbol{F}_{12}$（电流元在磁场中的受力公式）
- 考虑 $\boldsymbol{B}_1$ 对电圈 2 的微元 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_2$ 产生的作用力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12} = I_2\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_2 \times \boldsymbol{B}_1 = I_2\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_2 \times \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{L_1}\frac{I_1\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$\boldsymbol{F}_{12} = \oint_{L_2}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{L_2}\oint_{L_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_2 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{r}_{12})}{\boldsymbol{r}r_{12}^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{L_2}\oint_{L_1}\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_1(\boldsymbol{r}_{12}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_2)}{r_{12}^3} - \frac{\boldsymbol{r}_{12}(\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_2)}{r_{12}^3}\right]$$

- 上式括号中第二项对 L_2 的环积分为零...

分量形式

- 电圈 1 产生的磁场对电圈 2 的作用力:

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_1 (\boldsymbol{r}_{12} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_2)}{r_{12}^3} - \frac{\boldsymbol{r}_{12} (\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_2)}{r_{12}^3} \right]$$

- 上式括号中第一项对 L_2 的环积分为零:

$$\oint_{L_2} \frac{\boldsymbol{r}_{12} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_2}{r_{12}^3} = \oint_{S_2} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \left(\nabla \times \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) = 0 \ .$$

- 由此可得

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{\boldsymbol{r}_{12} \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_2}{r_{12}^3} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F}_{12} = \boldsymbol{F}_{21} .$$

向量分析相关教材（物理向）

- *《电磁学（拓展篇）》*，梁灿彬，曹周键，陈陟陶，高等教育出版社；专题 15——矢量代数和矢量分析
- *Vector Calculus*, P.C. Matthews, Springer