

电动力学B

Bin HU

bhu@bnu.edu.cn

Astro@BNU

Office: 南院F座101

全章重点

5. 电磁波的辐射

5.1 电磁场的标势和矢势

(电磁场的场论描述)

1. 用势描述电磁场 为简单起见,我们只讨论真空中的电磁场.麦克斯韦方程组为

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \\ (\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H})\end{aligned}\tag{1.1}$$

在恒定场中,由 \mathbf{B} 的无源性引入矢势 \mathbf{A} ,使

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.\tag{1.2}$$

在一般情况下, \mathbf{B} 仍然保持无源性,所以 \mathbf{B} 与矢势 \mathbf{A} 的关系(1.2)式是普遍成立的. 矢势 \mathbf{A} 的物理意义是:在任一时刻, \mathbf{A} 沿任一闭合回路的线积分等于该时刻通过回路内的磁通量.

在一般的变化情况中,电场 \mathbf{E} 的特性与静电场不同.电场 \mathbf{E} 一方面受到电荷的激发,另一方面也受到变化磁场的激发,后者所激发的电场是有旋的.因此,在一般情况,电场是有源和有旋的场,它不可能单独用一个标势来描述.在变化情况下电场与磁场发生直接联系,因而电场的表示式必然包含矢势 \mathbf{A} 在内.把(1.2)式代入(1.1)第一式得

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

该式表示矢量 $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 是无旋场, 因此它可以用标势 φ 描述,

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi.$$

因此, 一般情况下电场的表示式为

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.3)$$

(1.2)和(1.3)式把电磁场用矢势和标势表示出来. 注意现在 电场 \mathbf{E} 不再是保守力场, 一般不存在势能的概念, 标势 φ 失去作为电场中势能的意义. 因此, 在高频系统中, 电压的概念也失去确切的意义. 在变化场中, 磁场和电场是相互作用着的整体, 必须把矢势和标势作为一个整体来描述电磁场.

2. 规范变换和规范不变性 用矢势 \mathbf{A} 和标势 φ 描述电磁场不是唯一的, 即给定的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 并不对应于唯一的 \mathbf{A} 和 φ . 这是因为对矢势 \mathbf{A} 可以加上一个任意函数的梯度, 结果不影响 \mathbf{B} , 而这加在 \mathbf{A} 上的梯度部分在(1.3)式中又可以从 $\nabla \varphi$ 中除去, 结果亦不影响 \mathbf{E} . 设 ψ 为任意时空函数, 作变换

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi, \\ \varphi &\rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

加在 \mathbf{A} 上的梯度部分在(1.3)式中又可以从 $\nabla\varphi$ 中除去,结果亦不影响 \mathbf{E} . 设 ψ 为任意时空函数,作变换

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi, \\ \varphi &\rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t},\end{aligned}\tag{1.4}$$

有

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A}' &= \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \\ -\nabla\varphi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}.\end{aligned}$$

即 (\mathbf{A}', φ') 与 (\mathbf{A}, φ) 描述同一电磁场. 变换(1.4)式称为势的规范变换. 每一组 (\mathbf{A}, φ) 称为一种规范. 在经典电动力学中, 由于表示电磁场客观属性的可测量的物理量为 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} , 而不同规范又对应着同一的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} , 因此, 如果用势来描述电磁场, 客观规律应该和势的特殊的规范选择无关. 当势作规范变换时, 所有物理量和物理规律都应该保持不变, 这种不变性称为规范不变性.

在量子力学中, E 和 B 不能完全描述电磁场的所有物理效应. 例如在 A-B 效应中, 在非单连通区域内绕闭合路径一周的电子波函数相位差, 就由回路积分

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

描述, 它不能用 B 的局域作用来描述. 但是, 此回路积分仍然是规范不变的. 因为对 \mathbf{A} 作规范变换(1.4)后

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{l} &= \oint (\mathbf{A} + \nabla\psi) \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \oint d\psi \\ &= \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \end{aligned}$$

因此, 即使在量子力学中, 所有可测量的物理量仍然保持规范不变性.

在经典电动力学中, 势 \mathbf{A} 和 φ 的引入是作为描述电磁场的一种方法, 规范不变性是对这种描述方法所加的要求. 在近代物理中, 规范变换是由量子力学的基本原理引入的, 规范不变性是一条重要的物理原理. 在量子力学中 \mathbf{A} 和 φ 的地位也比在经典电动力

中,规范变换是由量子力学的基本原理引入的,规范不变性是一条重要的物理原理.在量子力学中 A 和 φ 的地位也比在经典电动力学中重要得多.因此我们要熟悉用势描述电磁场的方法.

现在已经清楚,不仅在电磁相互作用中,而且在其他基本相互作用,包括弱相互作用和强相互作用中,规范不变性是决定相互作用形式的一条基本原理.传递这些相互作用的场称为规范场.电磁场是人们最熟知的一种规范场.

从数学上来说,规范变换自由度的存在是由于在势的定义式(1.2)和(1.3)中,只给出 A 的旋度,而没有给出 A 的散度.我们知道仅由矢量场的旋度是不足以确定这矢量场的.为了确定 A ,还必须给定它的散度.电磁场 E 和 B 本身对 A 的散度没有任何限制.因此,作为确定势的辅助条件,我们可以取 $\nabla \cdot A$ 为任意的值.每一种选择就对应一种规范.采用适当的辅助条件可以使基本方程和计算简化,而且物理意义也较明显.从计算方便考虑,在不同问题中可以采用不同的辅助条件.应用最广的是以下两种规范条

件:

(1)库仑规范 辅助条件为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (1.5)$$

在这规范中 \mathbf{A} 为无源场,因而电场表示式

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

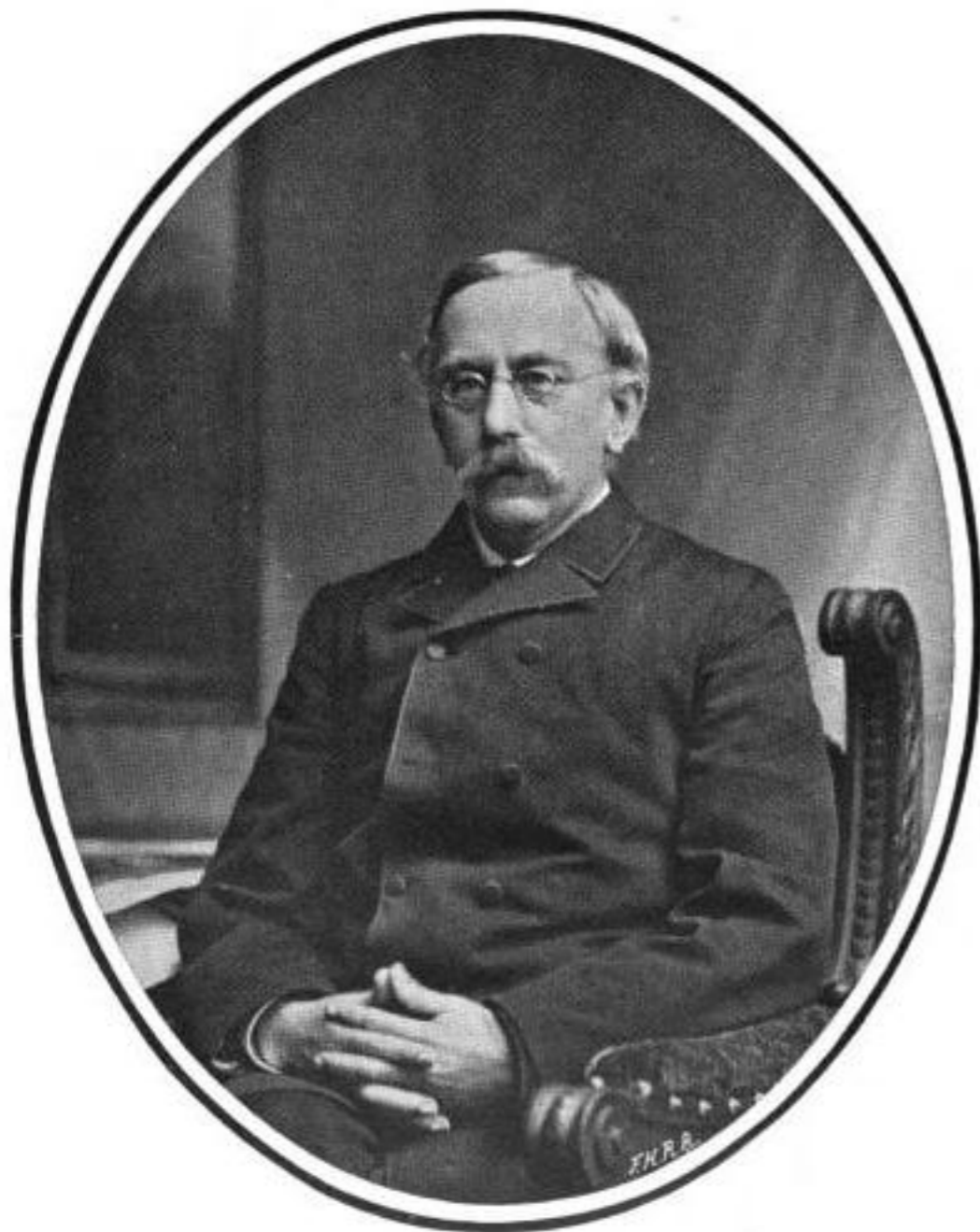
中第二项 $-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 是无源场(横场),而第一项 $-\nabla \varphi$ 为无旋场(纵场). 这规范的特点是 \mathbf{E} 的纵场部分完全由 φ 描述,而横场部分由 \mathbf{A} 描述, $-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 项不含纵场部分. $-\nabla \varphi$ 项对应于库仑场, $-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 项对应于感应电场. 这种划分对于讨论某些问题是方便的.

(2)洛伦兹规范 辅助条件为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (1.6)$$

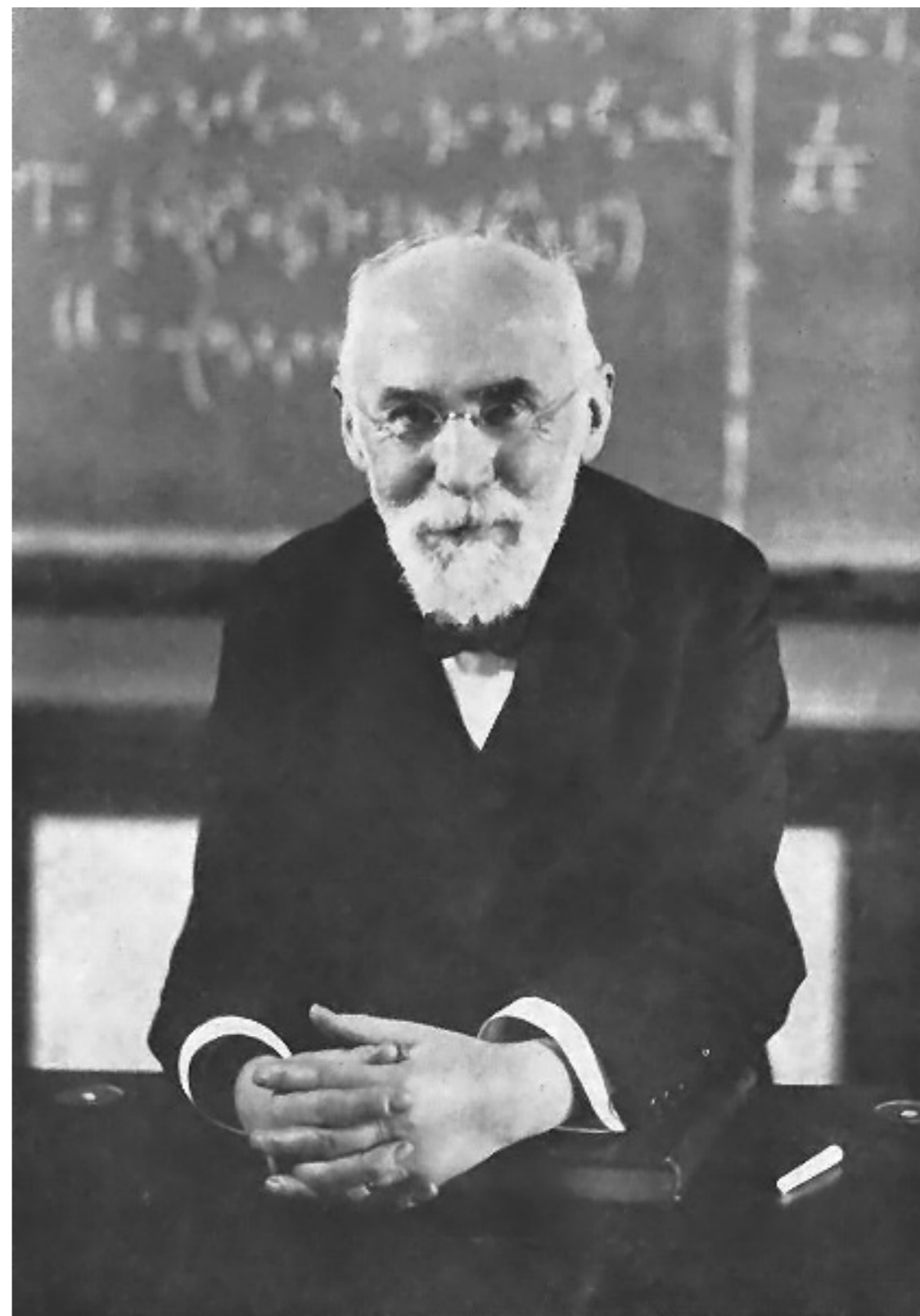
由下面的推导结果看出,采用这种规范时,势的基本方程化为特别简单的对称形式,其物理意义也特别明显. 因此,这种规范在基本理论研究以及解决实际辐射问题中是特别方便的.

3. 达朗贝尔(d'Alembert)方程 现在由麦克斯韦方程组推导势 \mathbf{A} 和 φ 所满足的基本方程. 把(1.2)和(1.3)式代入(1.1)第



L. Lorenz

Ludvig Lorenz



Hendrik Lorentz

由下面的推导结果看出,采用这种规范时,势的基本方程化为特别简单的对称形式,其物理意义也特别明显.因此,这种规范在基本理论研究以及解决实际辐射问题中是特别方便的.

3. 达朗贝尔(d'Alembert)方程 现在由麦克斯韦方程组推导势 \mathbf{A} 和 φ 所满足的基本方程.把(1.2)和(1.3)式代入(1.1)第二和第三式得

推导

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \\ -\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

应用 $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ 并将两式加以整理后,得

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \mathbf{J}, \\ \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

这是适用于一般规范的方程组.若采用库仑规范,由(1.5)式得

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi &= -\mu_0 \mathbf{J}, \\ \nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ (\nabla \cdot \mathbf{A} &= 0)\end{aligned}\tag{1.8}$$

这种规范的特点是标势所满足的方程与静电场情形相同,其解是库仑势.解出 φ 后代入第一式可解出 \mathbf{A} ,因而可以确定辐射电磁场.

若采用洛伦兹规范,由(1.6)和(1.7)式得

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J}, \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ (\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0)\end{aligned}\tag{1.9}$$

用这种规范时, \mathbf{A} 和 φ 的方程具有相同形式,其意义也特别明显.方程(1.9)称为达朗贝尔方程,它是非齐次的波动方程,其自由项

用这种规范时, \mathbf{A} 和 φ 的方程具有相同形式, 其意义也特别明显. 方程(1.9)称为达朗贝尔方程, 它是非齐次的波动方程, 其自由项为电流密度和电荷密度. 由(1.9)式, 电荷产生标势波动, 电流产生矢势波动. 离开电荷电流分布区域后, 矢势和标势都以波动形式在空间中传播, 由它们导出的电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 也以波动形式在空间中传播. 当然 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的波动性质是和规范无关的.

在洛伦兹规范下, 方程(1.9)式连同辅助条件 [洛伦兹条件(1.6)式] 是用势表述的电动力学基本方程组. 求得势的解后, 电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 由(1.2)和(1.3)式给出.

例 求平面电磁波的势.

解 平面电磁波在没有电荷电流分布的空间中传播, 因而势的方程(1.9)变为波动方程, 其平面波解为

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad \varphi = \varphi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}. \quad (1.10)$$

对 \mathbf{A} 和 φ 加上洛伦兹条件(1.6)式得

$$\varphi_0 = \frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_0. \quad (1.11)$$

因此,只要给定矢量 \mathbf{A}_0 ,就可以确定平面电磁波.场强 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -i\mathbf{k}\varphi + i\omega\mathbf{A} \\ &= -\frac{ic^2}{\omega}[\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - k^2\mathbf{A}] = -\frac{ic^2}{\omega}\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{A}) \\ &= -\frac{c^2}{\omega}\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -cn \times \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

和第四章 §1 结果一致.注意由(1.12)和(1.13)式,平面波电磁场只依赖于矢势 \mathbf{A} 的横向分量,对 \mathbf{A}_0 加上任意纵向部分 $\alpha\mathbf{k}$ (同时对 φ_0 加上 $\alpha\omega$, α 为任意常数)都不影响电磁场值.这说明在平面波情形,即使加上洛伦兹条件后, \mathbf{A} 和 φ 仍然不是唯一确定的,还剩下一些规范变换自由度.最简单的选择是取 \mathbf{A} 只有横向部分, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0$,因而由(1.11)式 $\varphi = 0$.用这规范时有

$$\mathbf{B} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = i\omega\mathbf{A}. \quad (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0) \quad (1.14)$$

如果我们采用库仑规范,势的方程(1.8)式在自由空间中变为

如果我们采用库仑规范, 势的方程(1.8)式在自由空间中变为

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = 0,$$

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{A} = 0).$$

当全空间没有电荷分布时, 库仑场的标势 $\varphi = 0$. 把 $\varphi = 0$ 代入第一方程得 \mathbf{A} 的波动方程, 其平面波解为

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}.$$

库仑条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 保证 \mathbf{A} 只有横向分量. 由(1.2)和(1.3)式得

$$\mathbf{B} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}, \mathbf{E} = i\omega\mathbf{A}, (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0).$$

与(1.14)式一致.

由这例看出库仑规范的优点. 它的标势 φ 描述库仑作用, 可直接由电荷分布 ρ 求出. 它的矢势只有横向分量, 刚好足够描述辐射电磁波的两种独立偏振. 而在采用洛伦兹规范时, \mathbf{A} 的纵向部分和标势 φ 的选择还可以有任意性, 即存在多余的自由度. 虽然

5.2 推迟势 (retarded)

现在我们求达朗贝尔方程的解. 标势 φ 的达朗贝尔方程为

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.1)$$

式中 $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ 是空间中的电荷密度. (2.1) 式是线性方程, 反映电磁场的叠加性. 由于场的叠加性, 可以先考虑某一体元内的变化电荷所激发的势, 然后对电荷分布区域积分, 即得总的标势.

设原点处有一假想变化电荷 $Q(t)$, 其电荷密度为 $\rho(\mathbf{x}, t) = Q(t)\delta(\mathbf{x})$. 这电荷辐射的势的达朗贝尔方程为

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} Q(t)\delta(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

由球对称性, φ 只依赖于 r, t , 而不依赖于角变量. (2.2) 式用球坐标表为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} Q(t)\delta(\mathbf{x}). \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} Q(t) \delta(\mathbf{x}). \quad (2.3)$$

除原点之外, φ 满足波动方程

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (r \neq 0) \quad (2.4)$$

(2.4)式的解是球面波. 考虑到当 r 增大时势减弱, 所以作如下代换

$$\varphi(r, t) = \frac{u(r, t)}{r}. \quad (2.5)$$

把(2.5)式代入(2.4)式, 得 u 的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (2.6)$$

这方程形式上是一维空间的波动方程, 其通解为

$$u(r, t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right), \quad (2.7)$$

式中 f 和 g 是两个任意函数. 由(2.5)式可得除原点以外 φ 的解

$$\varphi(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{g\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r}. \quad (2.8)$$

这解的第一项代表向外发射的球面波, 第二项代表向内收敛的球面波. 函数 f 和 g 的具体形式应由物理条件定出. 当我们研究辐射问题时, 电磁场是由原点处的电荷发出的, 它必然是向外发射的波. 因此在辐射问题中应取 $g = 0$, 而函数 f 的形式应由原点处的电荷变化形式决定. 在静电情形, 我们知道电荷 Q 激发的电势为

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (\text{静电场})$$

推广到变化场情形, 由(2.8)式的形式可以推想(2.2)式的解为

$$\varphi(r, t) = \frac{Q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.9)$$

下面我们证明(2.9)式是(2.2)式的解. 当(2.9)式代入(2.2)式

下面我们证明(2.9)式是(2.2)式的解. 当 $r \neq 0$ 时, (2.9)式满足波动方程(2.4). $r = 0$ 点是(2.9)式的奇点, 因此

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{Q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.10)$$

只可能在 $r = 0$ 点上不等于零, 在该点上(2.10)式可能有 δ 函数形式的奇异性. 为了研究在 $r = 0$ 点上(2.10)式的奇异性质, 我们作一半径为 η 的小球包围原点, 把(2.10)式在小球内积分,

$$\int_0^\eta 4\pi r^2 dr \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{Q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

当 $\eta \rightarrow 0$ 时, 积分的第二项 $\sim \eta^2$ 而趋于零, 而在第一项中, 只有对分母因子求二阶导数时才得到不为零的积分, 因此可令 $Q\left(t - \frac{r}{c}\right) \rightarrow Q(t)$, 这项变为

$$\frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0} \int dV \nabla^2 \frac{1}{r} = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0} (-4\pi) = -\frac{Q(t)}{\epsilon_0}.$$

[见第二章(5.10)式上面的积分公式.] 因此, 由 δ 函数的定义得

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \frac{Q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{\epsilon_0} Q(t) \delta(\mathbf{x}). \quad (2.11)$$

因此(2.9)式为方程(2.2)的解.

如果电荷不在原点上, 而是在 \mathbf{x}' 点上, 令 r 为 \mathbf{x}' 点到场点 \mathbf{x} 的距离, 有

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{Q\left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

由场的叠加性, 对于一般变化电荷分布 $\rho(\mathbf{x}', t)$, 它所激发的标势为

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r} dV'. \quad (2.12)$$

由于矢势 \mathbf{A} 所满足的方程形式上与标势的达朗贝尔方程一致, 所以一般变化电流分布 $\mathbf{J}(\mathbf{x}', t)$ 所激发的矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c})}{r} dV'. \quad (2.13)$$

可以验证 \mathbf{A} 和 φ 满足洛伦兹条件. 证明如下:

设 $t' = t - \frac{r}{c}$. 对 r 的函数而言, 有 $\nabla = -\nabla'$, 因此,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{r} dV' \quad \text{推导}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[-\nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{r} + \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{r} \right]_{t' \text{ 不变}} dV'$$

gauss law

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{r} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}', t')_{t' \text{ 不变}} dV',$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}', t') dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t'} \rho(\mathbf{x}', t') dV'$$

因而

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) \\ = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{r} (\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}', t')_{t' \text{ 不变}} + \frac{\partial}{\partial t'} \rho(\mathbf{x}', t')) dV'.\end{aligned}$$

由电荷守恒定律

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}', t')_{t' \text{ 不变}} + \frac{\partial}{\partial t'} \rho(\mathbf{x}', t') = 0$$

即得 \mathbf{A} 和 φ 满足洛伦兹条件(1.6)式.

(2.12)和(2.13)式给出空间 \mathbf{x} 点在时刻 t 的势, 这势是由电荷电流分布激发的. 对势 $\varphi(\mathbf{x}, t)$ 有贡献的不是同一时刻 t 的电荷密度值, 而是在较早时刻 $t - \frac{r}{c}$ 的电荷密度值. 如图 5-1,

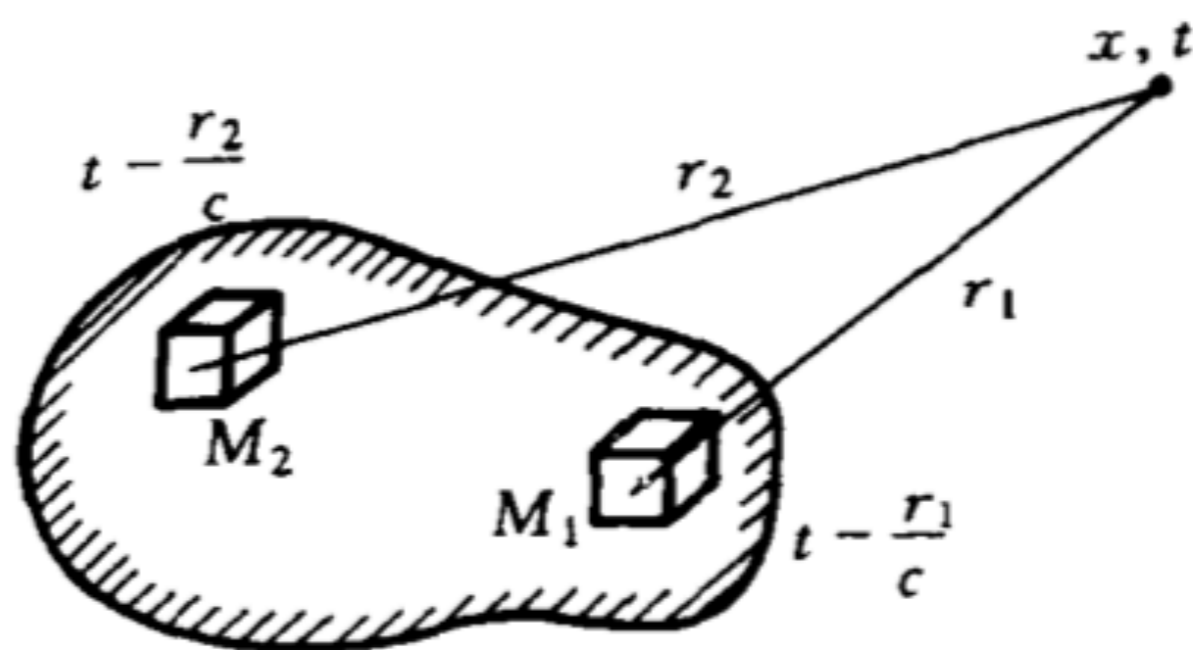


图 5-1

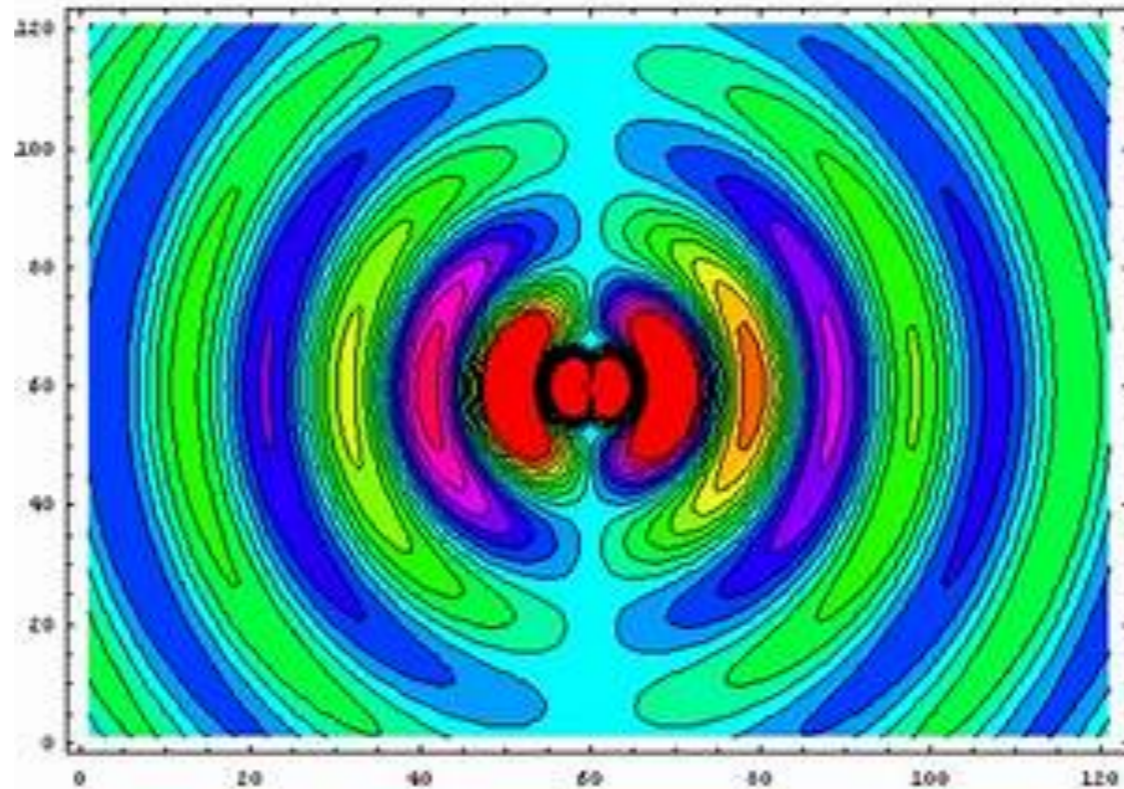
的电荷密度值. 如图 5-1,
设 M_1 距场点为 r_1 , 则在

图 5-1

M_1 点上的电荷在时刻 $t - \frac{r_1}{c}$ 的值对 $\varphi(\mathbf{x}, t)$ 有贡献, 而在 M_2 点上的电荷则在另一时刻 $t - \frac{r_2}{c}$ 对 $\varphi(\mathbf{x}, t)$ 有贡献. 因此我们在 \mathbf{x} 点 t 时刻测量到的电磁场是由电荷电流分布在不同时刻激发的.

(2.12)和(2.13)式的重要意义在于它反映了电磁作用具有一定的传播速度. 空间某点 \mathbf{x} 在某时刻 t 的场值不是依赖于同一时刻的电荷电流分布, 而是决定于较早时刻 $t - \frac{r}{c}$ 的电荷电流分布. 反过来说, 电荷产生的物理作用不能够立刻传至场点, 而是在较晚的时刻才传到场点, 所推迟的时间 r/c 正是电磁作用从源点 \mathbf{x}' 传至场点 \mathbf{x} 所需的时间, c 是电磁作用的传播速度. 因此, 解(2.12)和(2.13)式称为推迟势.

5.3 电偶极辐射



1. 计算辐射场的一般公式 当交变电流分布给定时, 计算辐射场的基础是推迟势公式

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c})}{r} dV'. \quad (3.1)$$

若电流 \mathbf{J} 是一定频率的交变电流, 有

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}', t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{-i\omega t}. \quad (3.2)$$

代入(3.1)式中得

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{i(kr - \omega t)}}{r} dV', \quad (3.3)$$

式中 $k = \omega / c$ 为波数. 令

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t},$$

有

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{ikr}}{r} dV'. \quad (3.4)$$

在(3.3)和(3.4)式中,因子 e^{ikr} 是推迟作用因子,它表示电磁波传至场点时有相位滞后 kr .

电荷密度 ρ 与电流密度 \mathbf{J} 由电荷守恒定律相联系,在一定频率的交变电流情形中有

$$i\omega\rho = \nabla \cdot \mathbf{J}. \quad (3.5)$$

由此,只要电流密度 \mathbf{J} 给定,则电荷密度 ρ 也自然确定.由(2.12)式,标势 φ 也跟着确定.因此,在这情形下,由矢势 \mathbf{A} 的公式(3.4)就可以完全确定电磁场.磁场 \mathbf{B} 可直接由 \mathbf{A} 求出,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.6)$$

算出 \mathbf{B} 后,电场 \mathbf{E} 可由麦克斯韦方程求出.在电荷分布区外面, $\mathbf{J} = 0$, 由真空中的麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c^2} \mathbf{E}$$

得

$$\mathbf{E} = \frac{ic}{k} \nabla \times \mathbf{B}. \quad (3.7)$$

2. 矢势的展开式 在矢势公式(3.4)中,我们注意到存在三个线度:电荷分布区域的线度 l ,它决定积分区内 $|\mathbf{x}'|$ 的大小;波长 $\lambda = 2\pi/k$ 以及电荷到场点的距离 r . 在本节中我们研究分布于一个小区域内的电流所产生的辐射. 所谓小区域是指它的线度 l 远小于波长 λ 以及观察距离 r , 即

$$l \ll \lambda, \quad l \ll r. \quad (3.8)$$

至于 r 和 λ 的关系,可以区别三种情况

- (1)近区 $r \ll \lambda$,
- (2)感应区 $r \sim \lambda$,
- (3)远区(辐射区) $r \gg \lambda$.



**bi-taylor
expansion**

三个区域内场的特点是不同的。在近区内， $kr \ll 1$ ，推迟因子 $e^{ikr} \sim 1$ ，因而场保持恒定场的主要特点，即电场具有静电场的纵向形式，磁场也和恒定场相似。在远区内，电磁场变为横向的辐射场。感应区是一个过渡区域。实际上，通常是在离发射系统远处接收电磁波的，对这类问题需要计算远场，由远场可定出辐射功率和角分布（方向性）。但是，如果要研究场对电荷系统的反作用（辐射阻抗）以及几个靠近的发射系统之间的相互影响时，必须计算近场和感应场。我们在这里主要讨论远区的场。

选坐标原点在电荷分布区域内，则 $|\mathbf{x}'|$ 的数量级为 l 。以 R 表示由原点到场点 \mathbf{x} 的距离 ($R = |\mathbf{x}|$)， r 为由源点 \mathbf{x}' 到 \mathbf{x} 的距离。有

$$r \approx R - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}', \quad (3.9)$$

\mathbf{n} 为沿 \mathbf{R} 方向的单位矢量。由条件 (3.8) 式，可以把 A 对小参数 \mathbf{x}'/R 和 \mathbf{x}'/λ 展开。在计算远场时，只保留 $1/R$ 的最低次项，而对 \mathbf{x}'/λ 的展开则保留各级项。

把(3.9)式代入(3.4)式得

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{ik(R - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')}}{R - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'} dV'. \quad (3.10)$$

由于我们只保留 $1/R$ 的最低次项,所以在分母中可略去 $-\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'$ 项.但是相因子中的 $-\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'$ 不应略去.这是因为这项贡献一个相因子

$$e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'} = e^{-i2\pi\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/\lambda},$$

所以这里涉及的是小参数 \mathbf{x}'/λ 而不是 \mathbf{x}'/R .相位差 $2\pi\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/\lambda$ 一般是不能忽略的,所以在相因子展开式中我们保留 \mathbf{x}'/λ 的各级项.

把(3.10)式中的相因子对 $k\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'$ 展开得

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') (1 - ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}' + \cdots) dV'. \quad (3.11)$$

下面我们会看到,展开式中各项对应于各级电磁多极辐射.



**bi-taylor
expansion**

$$\frac{\hat{n} \cdot \vec{x}'}{R} \sim \mathcal{O}(10^{-10})$$

$$\frac{\hat{n} \cdot \vec{x}'}{\lambda} \sim \mathcal{O}(10^{-3})$$

3. 偶极辐射 现在我们研究展开式的第一项

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'. \quad (3.12)$$

先看电流密度体积分的意义. 电流是由运动带电粒子组成的. 设单位体积内有 n_i 个带电量为 e_i , 速度为 \mathbf{v} 的粒子, 则它们各自对电流密度的贡献为 $n_i e_i \mathbf{v}$, 因此

$$\mathbf{J} = \sum_i n_i e_i \mathbf{v}_i$$

其中求和号表示对各类带电粒子求和. 上式也等于对单位体积内所有带电粒子的 $e\mathbf{v}$ 求和. 因此

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' = \sum e \mathbf{v},$$

式中求和号表示对区域内所有带电粒子求和. 但

$$\sum e \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \sum e \mathbf{x} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}},$$

式中 \mathbf{p} 是电荷系统的电偶极矩. 因此

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' = \dot{\mathbf{p}}. \quad (3.13)$$

图 5-2 表示一个简单的电偶极子系统, 它由两个相距为 Δl 的导体球组成, 两导体之间由细导线相连. 当导线上有交变电流 I 时, 两导体上的电荷 $\pm Q$ 就交替地变化, 形成一个振荡电偶极子. 这系统的电偶极矩为

$$\mathbf{p} = Q\Delta l.$$

当导线上有电流 I 时, Q 的变化率为

$$\frac{dQ}{dt} = I,$$

因而体系的电偶极矩变化率为

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} Q\Delta l = I\Delta l = \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV', \quad (3.14)$$

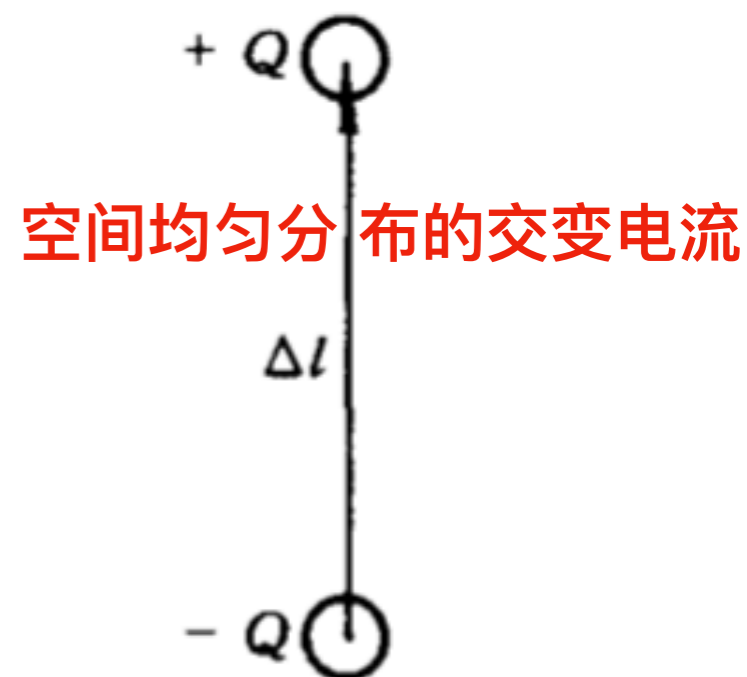


图 5-2

与一般公式(3.13)相符.

由此可见,(3.12)式代表振荡电偶极矩产生的辐射

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \dot{\mathbf{p}}. \quad (3.15)$$

在计算电磁场时,需要对 \mathbf{A} 作用算符 ∇ . 由于我们只保留 $1/R$ 的最低次项,因而算符 ∇ 不需作用到分母的 R 上,而仅需作用到相因子 e^{ikR} 上,作用结果相当于代换

$$\begin{aligned} \nabla &\rightarrow ik\mathbf{n}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow -i\omega. \end{aligned} \quad (3.16)$$

由此,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{i\mu_0 k}{4\pi R} e^{ikR} \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{p}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} e^{ikR} \ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}, \end{aligned} \quad \vec{p}(t, \vec{x}) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{E} = \frac{ic}{k} \nabla \times \mathbf{B} = c\mathbf{B} \times \mathbf{n} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} (\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}.$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} e^{ikR} \ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}, \quad \vec{p}(t, \vec{x}) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{E} = \frac{ic}{k} \nabla \times \mathbf{B} = c\mathbf{B} \times \mathbf{n} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} (\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}.$$

若取球坐标原点在电荷分布区内,并以 \mathbf{p} 方向为极轴,则由上式, \mathbf{B} 沿纬线上振荡, \mathbf{E} 沿经线上振荡(图 5-3),有

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} |\ddot{\mathbf{p}}| e^{ikR} \sin\theta \mathbf{e}_\phi, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} |\ddot{\mathbf{p}}| e^{ikR} \sin\theta \mathbf{e}_\theta.$$

磁感线是围绕极轴的圆周, \mathbf{B} 总是横向的. 电场线是经面上的闭合曲线, 如图 5-4 所示. 由于在空间中 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, \mathbf{E} 线必须闭合, 因此 \mathbf{E} 不可能完全横向. 只有在略去 $1/R$ 高次项后, \mathbf{E} 才近似为横向. 因此电偶极辐射是空间中的 TM 波.

why? 在辐射区电磁场 $\sim 1/R$, 能流 $\sim 1/R^2$, 对球面积分后总功率与球半径无关, 这就保证电磁能量可以传播到任意远处.

4. 辐射能流 角分布 辐射功率 在辐射问题的实际应用

plot

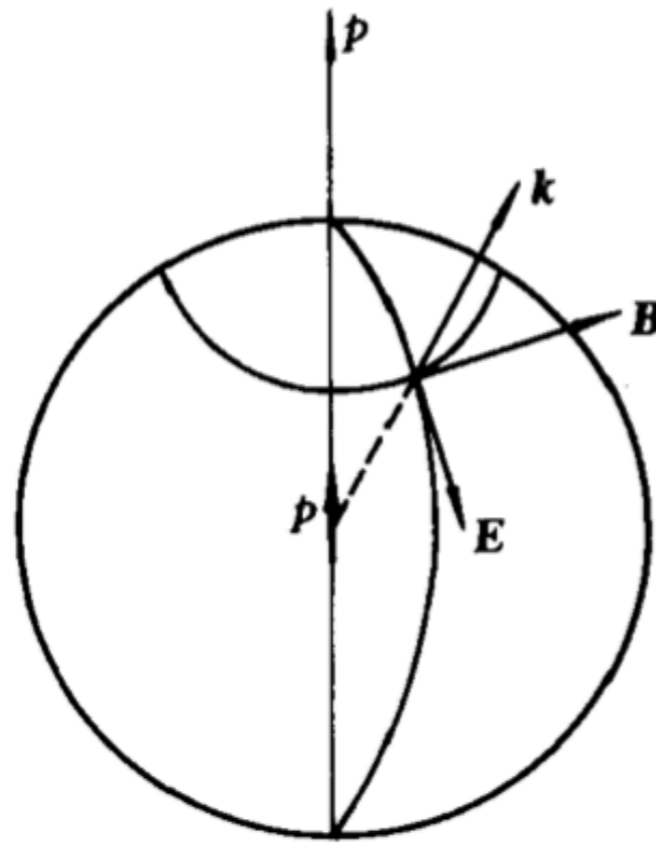
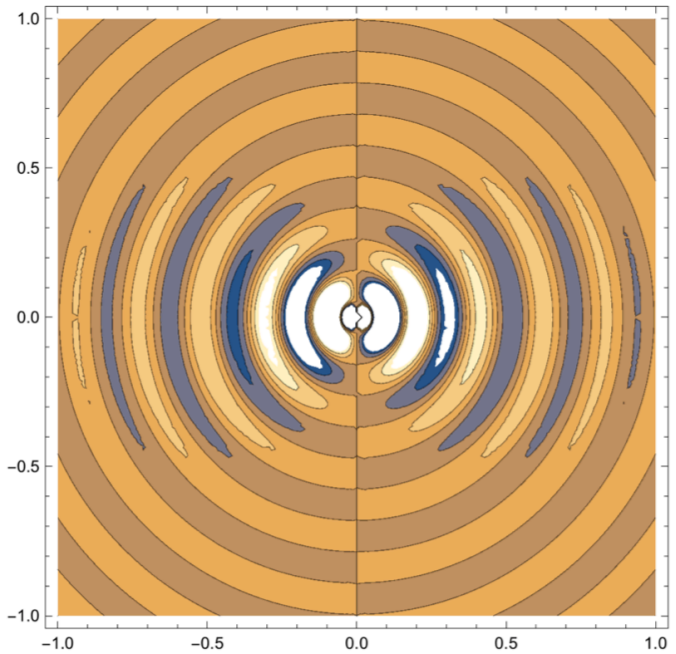
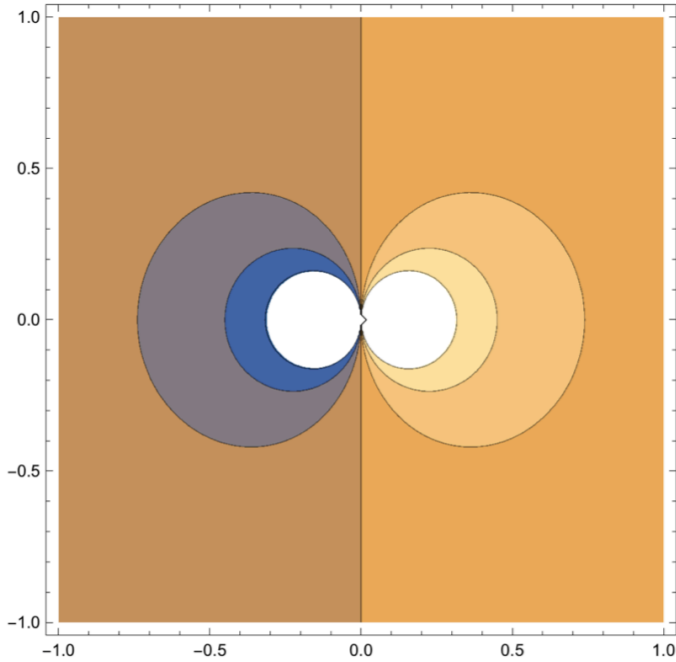


图 5-3

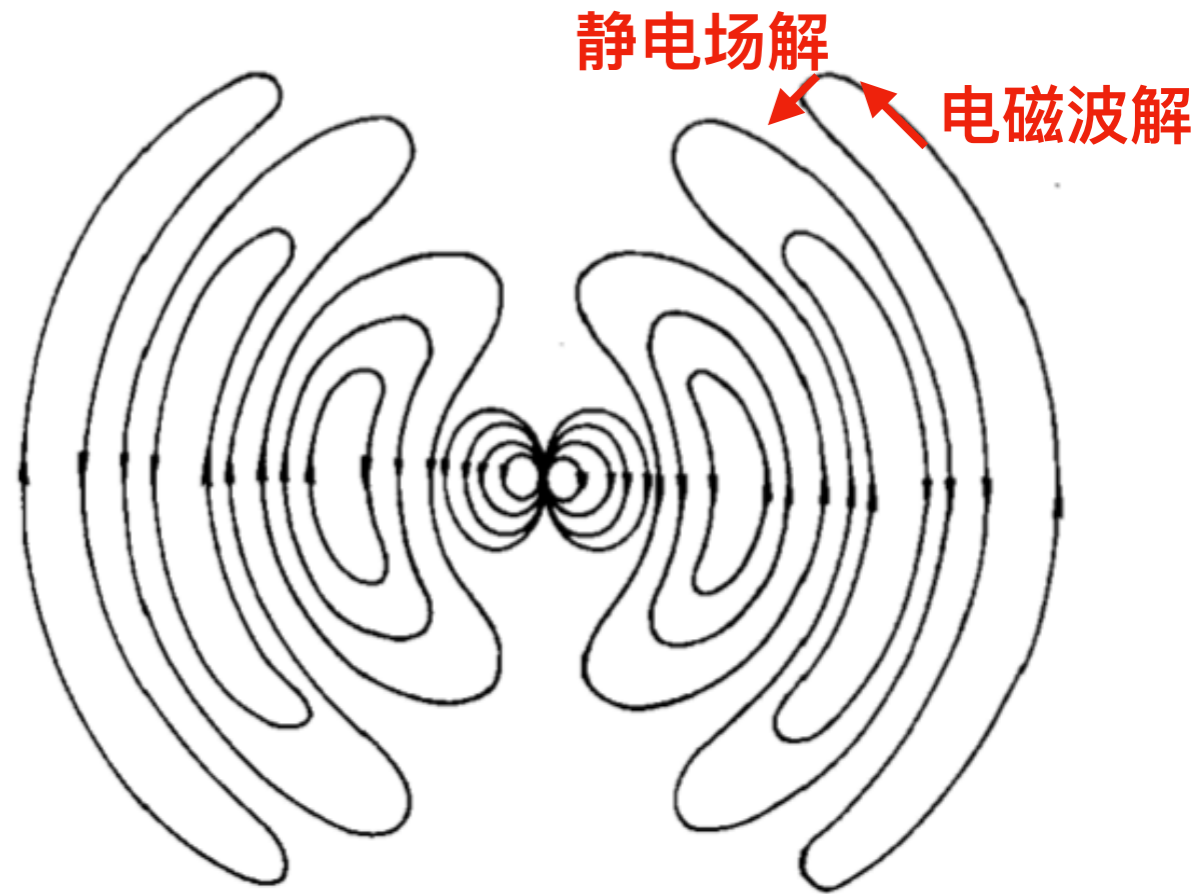


图 5-4

中,最主要的问题是计算辐射功率和辐射的方向性.这些都可以由平均能流密度 $\bar{\mathbf{S}}$ 求出.电偶极辐射的平均能流密度由(3.17-3.18)式和第四章(1.34)式得

作业(3.19/3.20)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{c}{2\mu_0} \text{Re}[(\mathbf{B}^* \times \mathbf{n}) \times \mathbf{B}] \\ &= \frac{c}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \mathbf{n} = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \sin^2 \theta \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

因子 $\sin^2 \theta$ 表示电偶极辐射的角分布,即辐射的方向性.在 θ

图 5-3

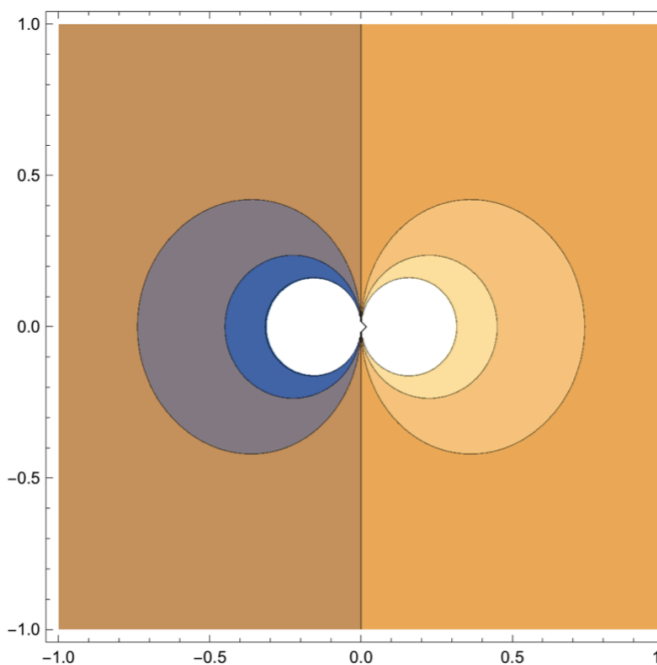


图 5-4

中,最主要的问题是计算辐射功率和辐射的方向性. 这些都可以由平均能流密度 $\bar{\mathbf{S}}$ 求出. 电偶极辐射的平均能流密度由(3.17-3.18)式和第四章(1.34)式得

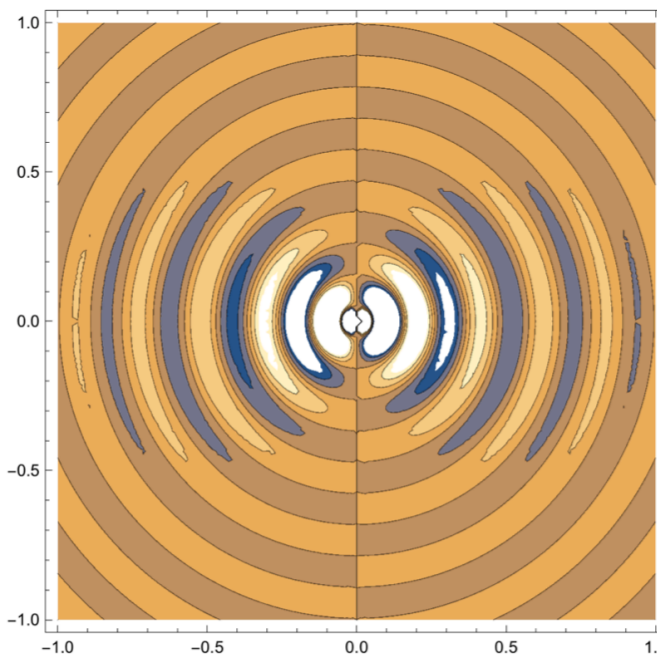
$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{c}{2\mu_0} \operatorname{Re}[(\mathbf{B}^* \times \mathbf{n}) \times \mathbf{B}] \\ &= \frac{c}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \mathbf{n} = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \sin^2 \theta \mathbf{n}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

因子 $\sin^2 \theta$ 表示电偶极辐射的角分布, 即辐射的方向性. 在 $\theta = 90^\circ$ 的平面上辐射最强, 而沿电偶极矩轴线方向 ($\theta = 0$ 和 π) 没有辐射. 电偶极辐射角分布如图 5-5 所示.

把 $\bar{\mathbf{S}}$ 对球面积分即得总辐射功率 P . 由(3.19)式,

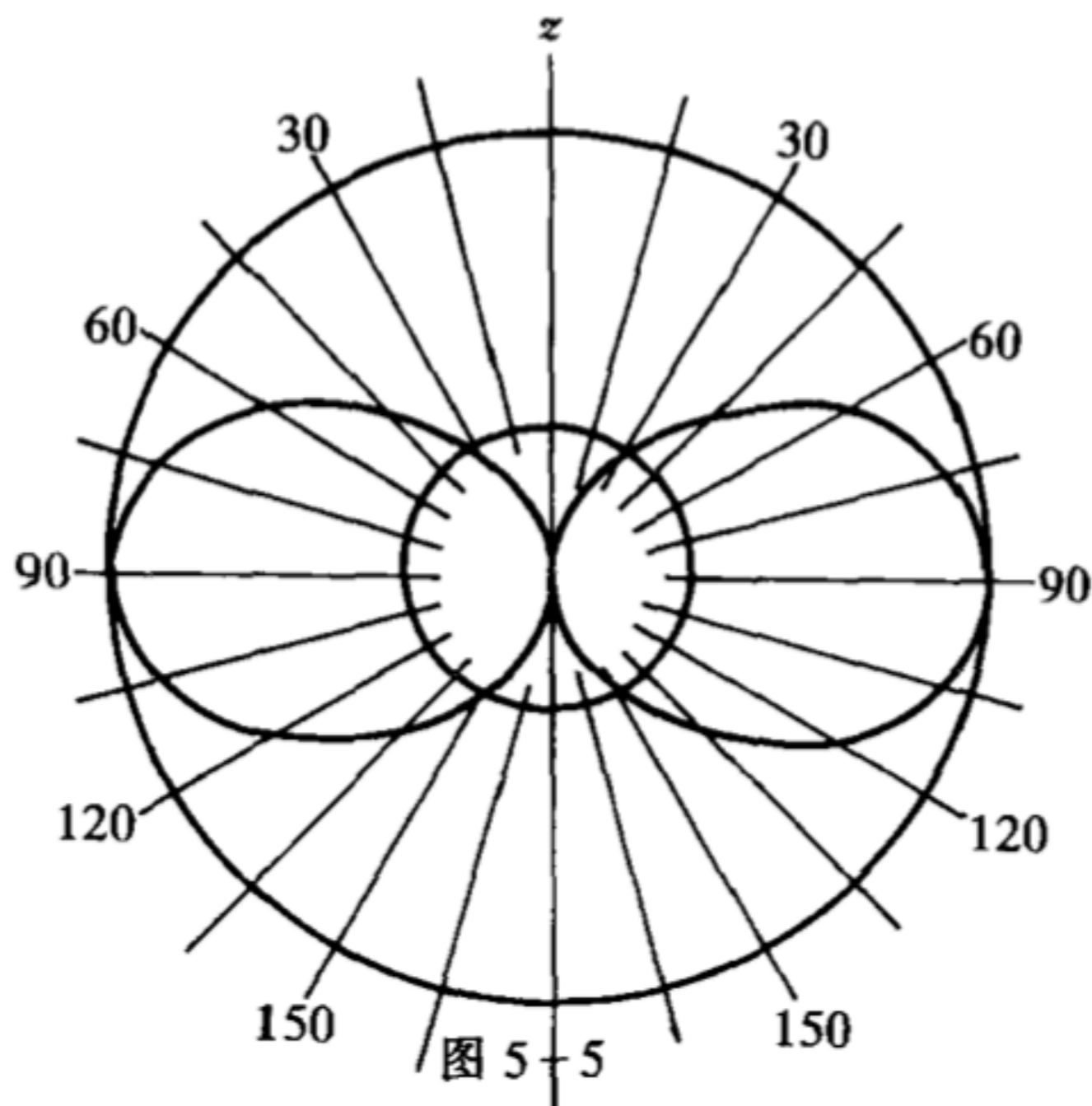
$$\begin{aligned}P &= \oint |\bar{\mathbf{S}}| R^2 d\Omega \\ &= \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \oint \sin^2 \theta d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{3c^3}.\end{aligned}\quad (3.20)$$

由此看出, 若保持电偶极矩振幅不变, 则辐射正比于频率的四次方. 频率变高时, 辐射功率迅速增大.



5. 短天线的辐射

辐射电阻 当直线天线的长度 l 远小于波长时, 它的辐射就是电偶极辐射. 图 5-6 表示中心馈电的长度为 l 的天线. 在天线两半段上, 电流方向相同. 馈电点处电流有最大值 I_0 , 在天线两端电流为零. 若天线长度 $l \ll \lambda$, 则沿天线上的电流分布近似为线性形式



$$I(z) = I_0 \left(1 - \frac{2}{l} |z|\right) \quad |z| \leq l/2.$$



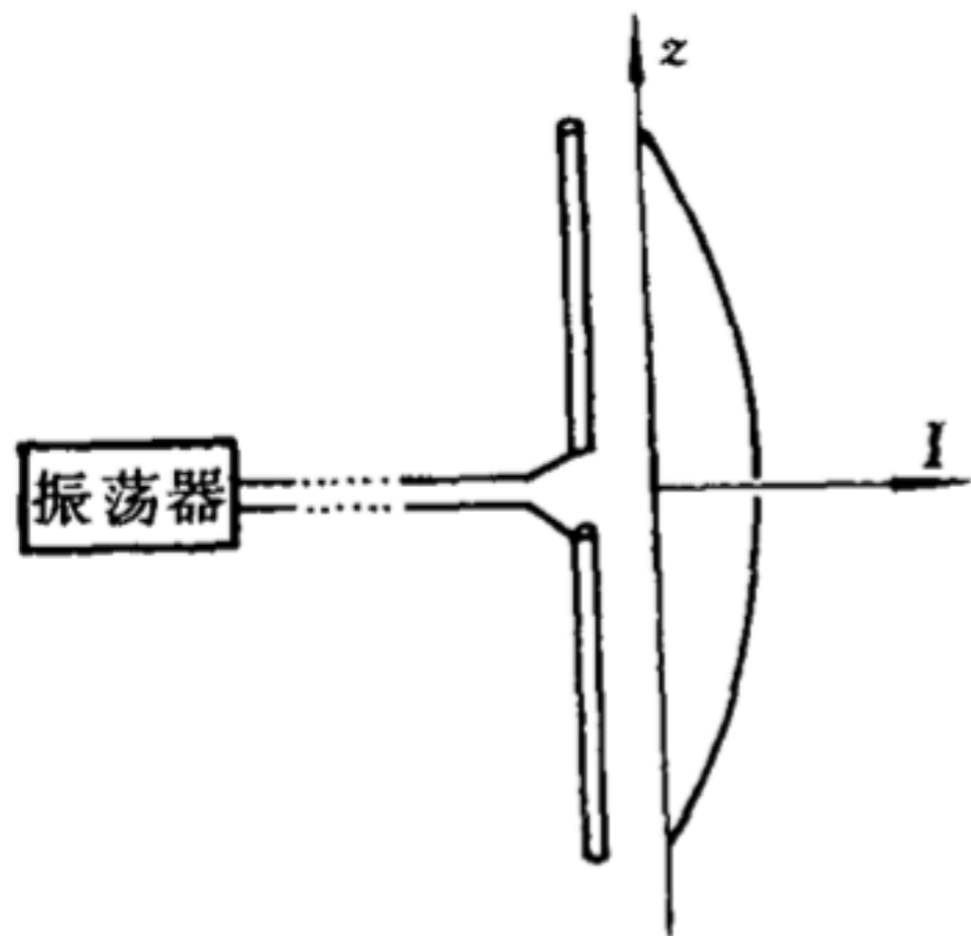


图 5-6

$$I(z) = I_0 \left(1 - \frac{2}{l} |z|\right) \quad |z| \leq l/2. \quad (3.21)$$

由(3.13)式,电偶极矩变化率为

$$\dot{p} = \int_{-l/2}^{l/2} I(z) dz = \frac{1}{2} I_0 l. \quad (3.22)$$

由(3.20)式得短天线的辐射功率

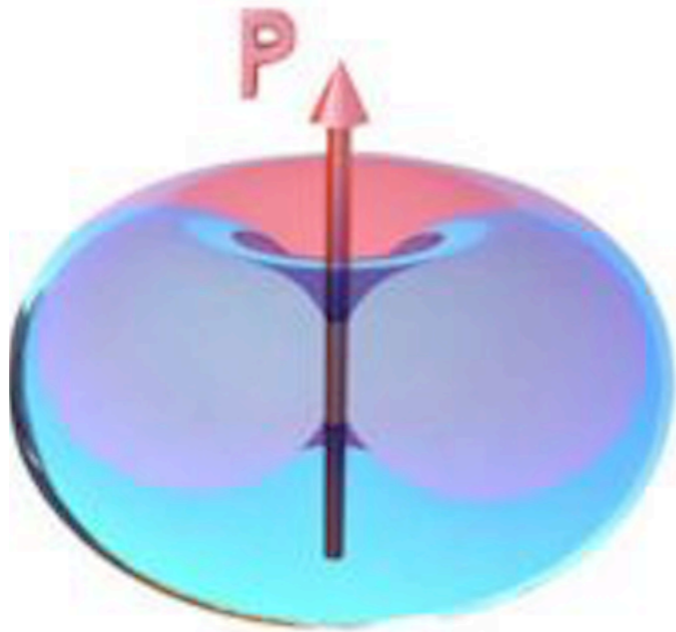
推导

$$P = \frac{\mu_0 I_0^2 \omega^2 l^2}{48\pi c} = \frac{\pi}{12} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (3.23)$$

上式适用于 $l \ll \lambda$ 情形. 由此式看出, 若保持天线电流 I_0 不变, 则短天线的辐射功率正比于 $(l/\lambda)^2$.

由于电磁能量不断向外辐射, 电源需要供给一定的功率来维持辐射. 由(3.23)式, 辐射功率正比于 I_0^2 , 因此辐射功率相当于一个等效电阻上的损耗功率. 这个等效电阻称为辐射电阻 R_r . 令

Electric dipole



$$P=RI^2$$

$$P = \frac{1}{2} R_r I_0^2, \quad (3.24)$$

由(3.23)式有

$$R_r = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (l \ll \lambda) \quad (3.25)$$

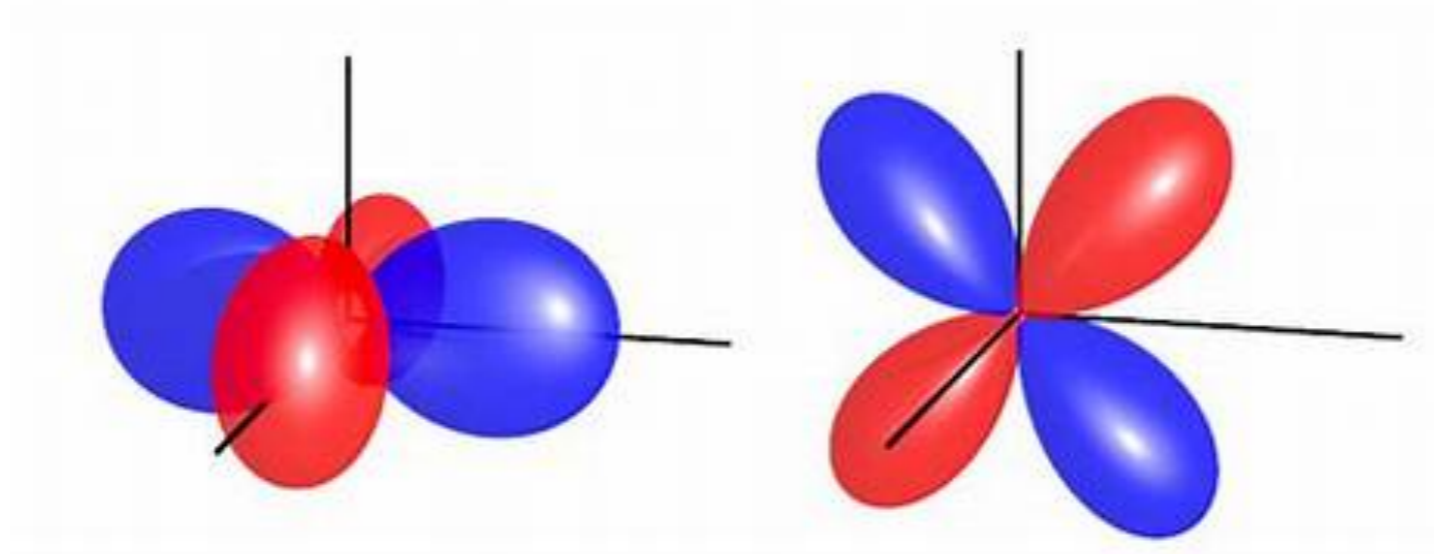
由于 $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376.7\Omega$, 因而

$$R_r = 197 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \Omega. \quad (3.26)$$

天线的辐射电阻愈大,表示在一定输入电流下,辐射功率愈大.因此,辐射电阻通常是用来表征天线辐射能力的一个量.由于短天线的辐射电阻正比于 $(l/\lambda)^2$,因此,短天线的辐射能力是不强的.要提高辐射能力,必须使天线长度增大到最小与波长同级.这种情况下天线的辐射已不能用电偶极辐射来表示.以后我们将要进一步讨论常用的半波天线的辐射.

5.4 磁偶极辐射&电四极辐射

极辐射



1. 高频电流分布的磁偶极矩和电四极矩 现在我们计算辐射场矢势 \mathbf{A} 展开式(3.11)的第二项

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{-ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}')(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') dV'. \quad (4.1)$$

当电流分布的电偶极矩(3.13)式为零时,这项变为主要项. 以下我们看出, (4.1)式代表磁偶极矩和电四极矩产生的辐射.

在恒定情况,我们知道小区域内的电荷分布激发电多极场,电流分布激发磁多极场. 在交变情形中,由于电流一般不闭合,电流分布往往与电荷分布相联系,由电荷守恒定律有

$$i\omega\rho = \nabla \cdot \mathbf{J}. \quad (4.2)$$

因此,一般来说(4.1)式包括电荷分布的贡献和磁矩分布的贡献,我们需要把两者分离开来。

图 5-7 表示两种不同的电流分布. 在图(a)所示的线圈中, 当各点上的电流以相同振幅和相同相位振荡时, 每一时刻都有 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, 这类电流分布是闭合的, 线圈上不带电荷 ρ , 因此线圈上的振荡电流所产生的辐射是纯磁多极辐射.

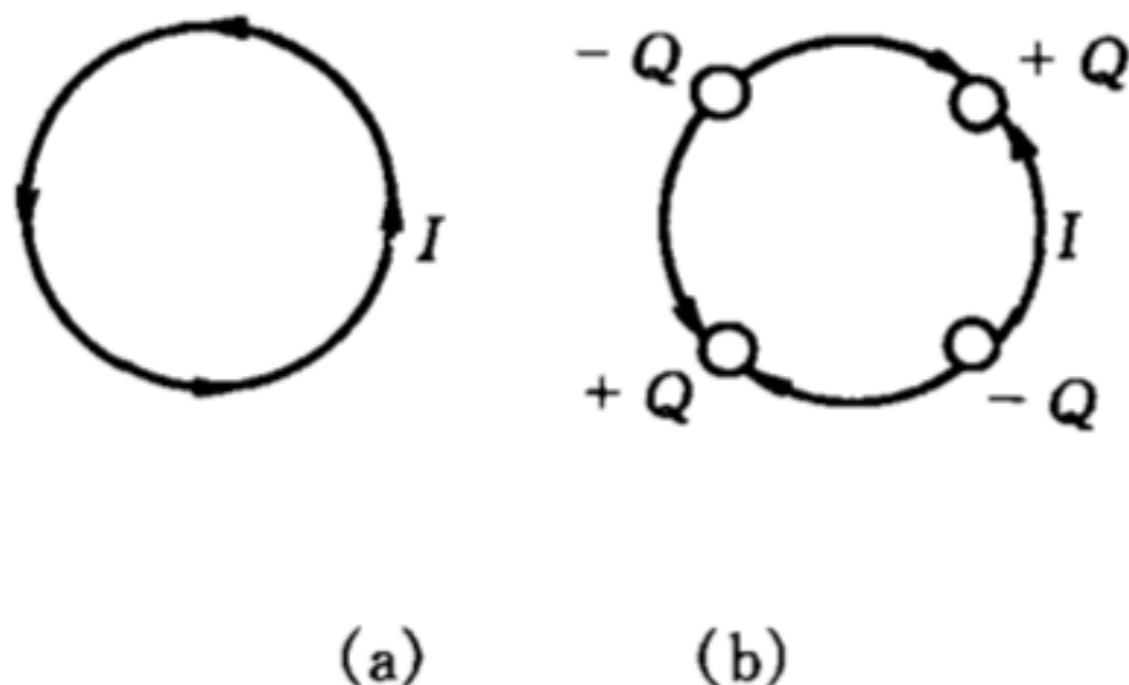


图 5-7

图 5-7(b)表示四个导体球的体系, 它们用细导线相连. 当导线上有如图所示的振荡电流时, 在四个导体上交替出现正负电荷, 因而这体系有振荡电四极矩, 它产生电四极辐射. 在一般情形下, 给定电流分布可以同时有电多极辐射和磁多极辐射.

现在我们把(4.1)式中的积分分离为磁矩的贡献和电四极矩的贡献. 把被积函数写为

$$\mathbf{J}'(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}' \mathbf{J}'.$$

$\mathbf{x}' \mathbf{J}'$ 是一个张量, 我们把它分解为对称部分和反对称部分

$$\mathbf{x}' \mathbf{J}' = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' \mathbf{J}' + \mathbf{J}' \mathbf{x}') + \frac{1}{2}(\mathbf{x}' \mathbf{J}' - \mathbf{J}' \mathbf{x}'),$$

因而(4.1)式中的积分可以写为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J}' + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}') \mathbf{x}'] dV' \\ & + \frac{1}{2} \int [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J}' - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}') \mathbf{x}'] dV'. \end{aligned} \quad (4.3)$$

先看第二项, 由于

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J}' - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}') \mathbf{x}' = -\mathbf{n} \times (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}'),$$

因而(4.3)式第二项为

$$-\mathbf{n} \times \int \frac{1}{2} \mathbf{x}' \times \mathbf{J}' dV' = -\mathbf{n} \times \mathbf{m}. \quad (4.4)$$

\mathbf{m} 是体系的磁矩[见第三章(3.9)式]. 因此这项导致的辐射是磁

偶极辐射.

再看(4.3)式第一项,把它写为对所有带电粒子求和得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J}' + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}') \mathbf{x}'] dV \\ &= \frac{1}{2} \sum e [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{v}' + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}') \mathbf{x}']. \end{aligned}$$

式中 \mathbf{v}' 为带电粒子的速度. 因为 $\mathbf{v}' = d\mathbf{x}'/dt$, 因而上式可写

为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum e(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{x}' &= \mathbf{n} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum e \mathbf{x}' \mathbf{x}' \right) \\ &= \frac{1}{6} \mathbf{n} \cdot \frac{d}{dt} \vec{\mathcal{D}} = \frac{1}{6} \mathbf{n} \cdot \dot{\vec{\mathcal{D}}}\end{aligned}\quad (4.5)$$

式中

$$\vec{\mathcal{D}} = \sum 3e \mathbf{x}' \mathbf{x}' \quad (4.6)$$

是体系的电四极矩[见第二章(6.6)式].

把(4.4)和(4.5)式代入(4.1)式得

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \left[-\mathbf{n} \times \mathbf{m} + \frac{1}{6} \mathbf{n} \cdot \dot{\vec{\mathcal{D}}} \right]. \quad (4.7)$$

第一项是磁偶极辐射势,第二项是电四极矩辐射势.由此可见,磁偶极辐射和电四极辐射是在 \mathbf{A} 的展开式同一级项中出现的.

在图 5-7(b)所示的体系中,若导体所在平面为 xy 面,则这体系的电四极矩有 \mathcal{D}_{xy} 分量.图 5-8 表示一直线上的振荡电四极子.设上下两导体用细导线与中间一个导体相连,当两导线上有反向交变电流时,上下导体出现同号电荷 Q ,中间导体出现电荷 $-2Q$.这体系具有电四极矩分量

$$\mathcal{D}_{zz} = 6Ql^2.$$

2. 磁偶极辐射 先计算(4.7)式中的磁偶极辐射项

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \mathbf{n} \times \mathbf{m}. \quad (4.8)$$

辐射区的电磁场为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = ik\mathbf{n} \times \mathbf{A} \\
 &= k^2 \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{n} \\
 &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R} (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}, \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{n} = -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c R} (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}).$$

把(4.9)式和电偶极辐射场(3.17)式比较,可见由电偶极辐射场作以下代换

$$\mathbf{p} \rightarrow \frac{\mathbf{m}}{c},$$

$$\mathbf{E} \rightarrow c\mathbf{B},$$

$$c\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E},$$

即得磁偶极辐射场. 这代换反映麦克斯韦方程组的电磁对称性. 在自由空间中, 麦氏方程组对变换 $\mathbf{E} \rightarrow c\mathbf{B}, c\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ 是对称的. 若电磁场 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ 是麦氏方程组的解, 则代换后的电磁场也是麦氏方程组的解.

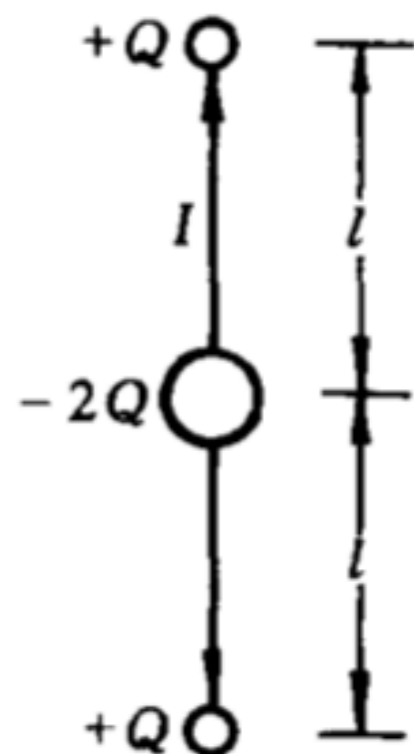


图 5-8

$$(4.10)$$

即得磁偶极辐射场. 这代换反映麦克斯韦方程组的电磁对称性. 在自由空间中, 麦氏方程组对变换 $\mathbf{E} \rightarrow c\mathbf{B}, c\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ 是对称的. 若电磁场 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ 是麦氏方程组的解, 则代换后的电磁场也是麦氏方程组的解.

磁偶极辐射的能流密度为

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0 \omega^4 |\mathbf{m}|^2}{32\pi^2 c^3 R^2} \sin^2 \theta \mathbf{n}, \quad (4.11)$$

式中 $|\mathbf{m}|$ 为磁矩的振幅, θ 为极角(以 \mathbf{m} 方向为极轴). 总辐射功率为

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 |\mathbf{m}|^2}{12\pi c^3}. \quad (4.12)$$

例 一电流线圈半径为 a , 激发电流振幅为 I_0 , 角频率为 ω , 求辐射功率.

解 电流线圈的磁矩为

$$m = I_0 \pi a^2.$$

代入(4.12)式得辐射功率

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 I_0^2 (\pi a^2)^2}{12\pi c^3} = \frac{4\pi^5}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I_0^2. \quad (4.13)$$

当电流 I_0 不变时, 辐射功率 $\sim \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4$. 因此磁偶极辐射比电偶极辐射小 $(a/\lambda)^2$ 数量级. 小线圈的辐射能力比短天线更低.

3. 电四极辐射 现在计算(4.7)式中的电四极辐射项

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{24\pi R} \mathbf{n} \cdot \overset{\ddot{\mathcal{D}}}{\mathcal{D}}. \quad (4.14)$$

定义矢量 $\overset{\rightarrow}{\mathcal{D}}(\mathbf{n})$

$$\overset{\rightarrow}{\mathcal{D}}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \overset{\ddot{\mathcal{D}}}{\mathcal{D}}, \quad (4.15)$$

则矢势表示式为

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{24\pi R} \overset{\ddot{\mathcal{D}}}{\mathcal{D}} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\epsilon_0 c^3 R} \overset{\ddot{\mathcal{D}}}{\mathcal{D}}. \quad (4.16)$$

辐射区电磁场为

$$\mathbf{B} = ik\mathbf{n} \times \mathbf{A} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\epsilon_0 c^4 R} \overset{\ddot{\mathcal{D}}}{\mathcal{D}} \times \mathbf{n}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{n} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\epsilon_0 c^3 R} (\overset{\ddot{\mathcal{D}}}{\mathcal{D}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}.$$

由上式,对 $\overset{\rightarrow}{\mathcal{D}}$ 加上与 \mathbf{n} 成正比的项并不影响辐射区电磁场,因此和恒定场情况一样,我们可以采用电四极矩的新定义

$$\overset{\rightarrow}{\mathcal{D}} = \sum e(3\mathbf{x}'\mathbf{x}' - r'^2 \overset{\rightarrow}{\mathcal{J}}), \quad (4.18)$$

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{n} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\epsilon_0 c^3 R} (\ddot{\mathcal{D}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}. \quad (4.17)$$

由上式,对 $\ddot{\mathcal{D}}$ 加上与 \mathbf{n} 成正比的项并不影响辐射区电磁场,因此和恒定场情况一样,我们可以采用电四极矩的新定义

$$\ddot{\mathcal{D}} = \sum e(3\mathbf{x}'\mathbf{x}' - r'^2 \mathcal{J}), \quad (4.18)$$

$$\mathcal{D}_{ij} = \sum e(3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}).$$

如此定义的电四极矩只有 5 个独立分量.

辐射平均能流密度为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{c}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{288\pi c^5 R^2} (\ddot{\mathcal{D}} \times \mathbf{n})^2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

设电荷分布区域线度为 l , 则 $\mathcal{D}_{ij} \sim O(l^2)$. 由(4.19)式, 辐射功率 $\sim \omega^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4$, 可见电四极辐射与磁偶极辐射同级, 比电偶极辐射小 $(l/\lambda)^2$ 数量级.

辐射角分布由因子 $(\vec{\mathcal{D}} \times \mathbf{n})^2$ 确定. 一般情形角分布较为复杂, 这里不作详细计算.

多极辐射在原子核物理中有重要意义. 由辐射几率(正比于经典辐射功率)和角分布可以推知辐射的电磁多极性质, 由此提供关于原子核内部运动的一些知识.

例 求图 5-8 的电四极子以频率 ω 振荡时的辐射功率和角分布.

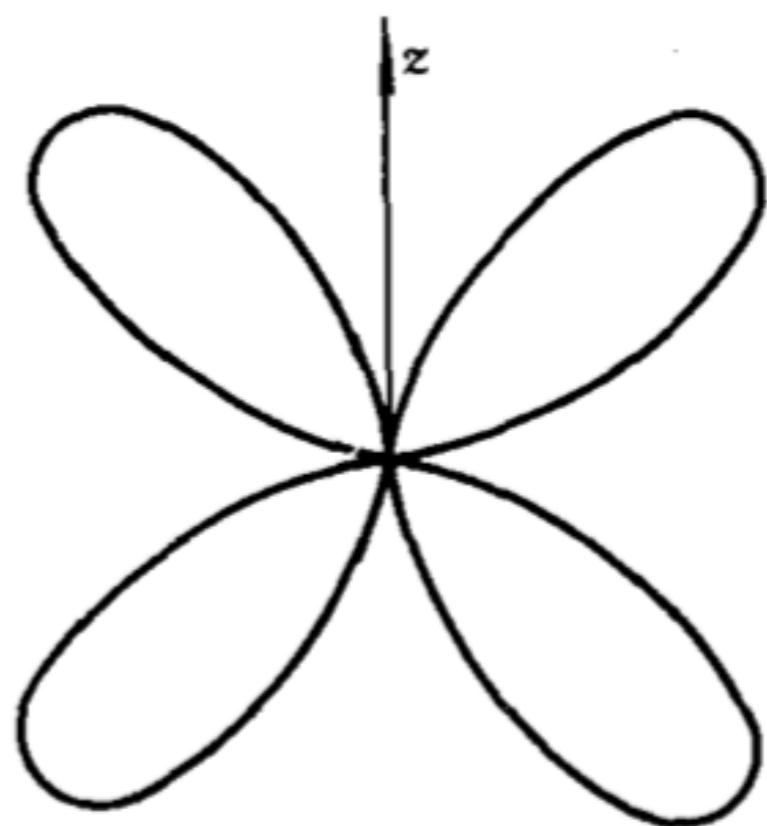
解 该体系的电四极矩张量为

$$\vec{\mathcal{D}} = 6Ql^2 \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathcal{D} \equiv \mathbf{n} \cdot \vec{\mathcal{D}} = 6Ql^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z = 6Ql^2 \cos\theta \mathbf{e}_z$$

$$\vec{\mathcal{D}} \times \mathbf{n} = 6Ql^2 \cos\theta \mathbf{e}_z \times \mathbf{n} = 6Ql^2 \cos\theta \sin\theta \mathbf{e}_\phi$$

作业



$$|\ddot{\mathcal{D}} \times \mathbf{n}|^2 = 36Q^2 l^4 \omega^6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

图 5-9

辐射角分布由因子 $\cos^2 \theta \sin^2 \theta$ 确定，方向图如图 5-9 所示。

辐射功率为

$$\begin{aligned} P &= \int \bar{S} R^2 d\Omega \\ &= \frac{Q^2 l^4 \omega^6}{60\pi\epsilon_0 c^5} \\ &= \frac{4\pi^3}{15} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 I_0^2, \end{aligned} \quad (4.20)$$

其中 $I_0 = \omega Q$ 。与(4.13)式比较，可见电四极辐射和磁偶极辐射是同数量级的。

$$Q_{jk} = \int \rho x_j x_k d^3x,$$

gravitational wave is, at

$$h_{jk} = \frac{2}{r} \frac{d^2 Q_{jk}}{dt^2}.$$

5.5 天线辐射(antenna)



以上两节研究了小区域内高频电流所产生的辐射,结果表明,当区域线度 $l \ll \lambda$ 时辐射功率为 $(l/\lambda)^2$ 数量级或更小. 因此,要得到较大的辐射功率,必须使天线长度至少达到与波长同数量级. 最常用的天线是半波天线,这种天线的长度约为半波长. 本节计算半波天线的辐射.

1. 天线上的电流分布 当天线长度与波长 λ 同级时,不能用展开式(3.11),而必须直接用公式(3.4)计算. 用此式进行计算时,首先要知道天线上的电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$. 由于天线上的电流是受到场作用的,因此这个问题的彻底解决要求把天线外面的场和天线上的电流作为相互作用的两个方面,用天线表面上的边值关系联系起来,作为边值问题来求解. 近年来所用的许多特殊形状的天线都需要这样来求解,这类问题的理论分析往往是比较复杂的. 但是,某些形状的天线可以用较简单的方法导出近似电流分布. 下面我们分析细长直线天线上电流分布的形式.

我们分析细长直线天线上电流分布的形式。

取天线沿 z 轴, 天线表面上的电流 J 沿 z 轴方向, 因而 \mathbf{A} 只有 z 分量. 由洛伦兹条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (5.1)$$

和

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}, \quad (5.2)$$

得

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} \\ &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

设天线为理想导体,在天线表面上,电场切向分量 $E_z = 0$,因而在天线表面上 A_z 满足一维波动方程

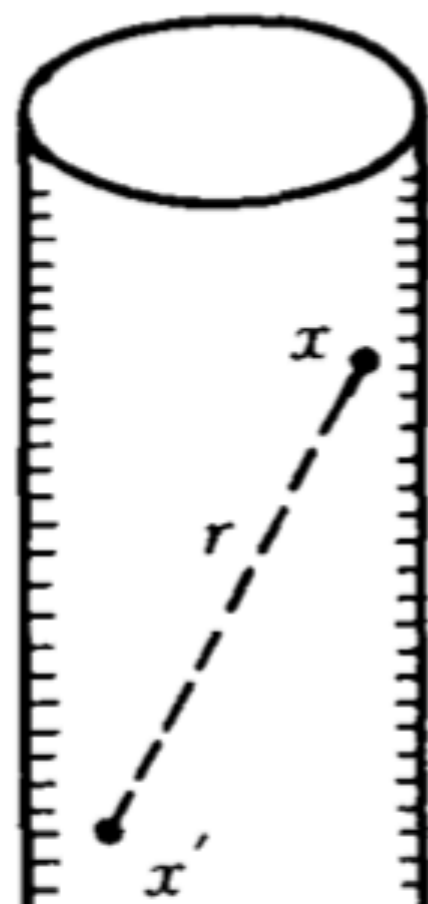
$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = 0. \quad (5.3)$$

因此,沿天线表面, $A_z(z)$ 是一种波动形式.

矢势 \mathbf{A} 与天线电流的关系是推迟势公式(3.4)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{ikr}}{r} dV', \quad (5.4)$$

在此式中,当 \mathbf{x} 点在天线表面上时,我们已知 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 是一维波动方程的解. 因此,我们把(5.4)式应用到 \mathbf{x} 点在天线表面上的情况. 如图 5-10, \mathbf{x} 点是天线表面一点, \mathbf{x}' 点是表面上另一点,两点距离为 r . 函数 $\mathbf{A}(z)$ 的形式已知,而 $\mathbf{J}(z')$ 是未知函数. 因此,(5.4)式可以看作未知函数 $\mathbf{J}(z')$ 的积分方程,我们要求该积分方程的满足端点条



的积分方程,我们要求该积分方程的满足端点条件 $J=0$ 的解. 这样,关于天线的边值问题就化为解积分方程(5.4)的问题. 由这方程原则上可以解出 $J(x')$ ^①. 我们对这问题不作一般讨论,而仅说明当天线截面很小时电流分布的近似形式. 如图 5-10,若天线截面很小,则当 x 点的 z 坐标与 x' 点的 z' 坐标靠近时, r 值就很小,因而对(5.4)式的积分贡献较大. 在此情形下, $A(z)$ 主要与 $z' \approx z$ 的电流 $J(z')$ 有关,因而 $J(z')$ 的形式应该近似于 $A(z)$ 的形式,即也是波动形式. 由于在天线端点处 $J(z')$ 应等于零,因此电流沿天线的分布应该近似为驻波形式,天线两端是电流驻波的波节. 由以上的分析可见,这近似只有当天线截面很小时成立,天线愈粗,驻波电流形式就愈不准确.



图 5-10

2. 半波天线 设有中心馈电的直线状天线(见图 5-6). 天线上的电流近似为驻波形式, 两端为波节. 设天线总长度为 l , 电流分布为

$$I(z) = \begin{cases} I_0 \sin k \left(\frac{l}{2} - z \right) & 0 \leq z \leq \frac{l}{2}, \\ I_0 \sin k \left(\frac{l}{2} + z \right) & -\frac{l}{2} \leq z \leq 0. \end{cases}$$

若 $l = \lambda/2$, 上式化为

$$I(z) = I_0 \cos kz \quad |z| \leq \frac{\lambda}{4}. \quad (5.5)$$

在矢势公式(5.4)中, 把 $\mathbf{J}(\mathbf{x}')dV'$ 改为 $I dl$, 并把(5.5)式代入, 得

$$A_z(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \frac{e^{ikr}}{r} I_0 \cos kz dz. \quad (5.6)$$

计算远场时, 令

$$r = R - z \cos \theta,$$

其中 R 为由原点到场点的距离. 取 $1/R$ 最低次项时, 分母中的 r 可代为 R . (5.6)式变为

$$r = ikR \left(\frac{\lambda}{4} \right)$$

可代为 R . (5.6)式变为

$$A_z(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos kz e^{-ikz \cos\theta} dz. \quad (5.7)$$

先计算积分

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos kz e^{-ikz \cos\theta} dz \\ &= \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos kz [\cos(kz \cos\theta) - i \sin(kz \cos\theta)] dz. \end{aligned}$$

此式虚数部分为 z 的奇函数, 积分后得零. 因此上式变为

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos kz \cos(kz \cos\theta) dz \\ &= \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{k \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

代入(5.7)式得

$$ik\hat{n} \times \hat{e}_z$$

$$\hat{n} = \cos\theta\hat{e}_z + \sin(\theta)\hat{e}_r$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I_0 e^{ikR}}{2\pi kR} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta} \mathbf{e}_z. \quad (5.9)$$

由此算出辐射区的电磁场

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -i \frac{\mu_0 I_0 e^{ikR}}{2\pi R} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta} \mathbf{e}_\phi, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -i \frac{\mu_0 c I_0 e^{ikR}}{2\pi R} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta} \mathbf{e}_\theta = c\mathbf{B} \times \mathbf{n}.$$

辐射能流密度为

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2 R^2} \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta} \mathbf{n}. \quad (5.11)$$

辐射角分布由因子

$$\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

plot!

辐射角分布由因子

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \quad \text{plot!}$$

确定. 它与偶极辐射角分布相似, 但较集中于 $\theta = 90^\circ$ 平面上.

总辐射功率

$$\begin{aligned} P &= \oint |\bar{\mathbf{S}}| R^2 d\Omega = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} \oint \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} d\Omega \\ &= \frac{\mu_0 c I_0^2}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta. \end{aligned}$$

令 $u = \cos\theta$, 积分化为

$$\frac{\mu_0 c I_0^2}{16\pi} \int_{-1}^1 (1 + \cos\pi u) \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du.$$

第二括号内两项贡献相等(作代换 $u \rightarrow -u$ 即可看出), 上式变为

$$\frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi} \int_{-1}^1 \frac{1 + \cos\pi u}{1+u} du.$$

再令 $v = \pi(1 + u)$, 上式变为

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos v}{v} dv \\ &= \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi} [\ln(2\pi\gamma) - \text{Ci}(2\pi)]. \end{aligned}$$

式中 $\ln\gamma = 0.577\cdots$ 为欧拉(Euler)常数^①, $\text{Ci}(x)$ 为积分余弦函数, 定义为

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\cos v}{v} dv.$$

$\text{Ci}(x)$ 的值可查表求出, 结果得

$$P = 2.44 \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi}. \quad (5.12)$$

辐射电阻为

$$R_r = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \times 2.44 = 73.2\Omega. \quad (5.13)$$

由此可见半波天线的辐射能力是相当强的.

3. 天线阵 半波天线对极角 θ 有一定的方向性, 对方位角没有方向性. 要得到高度定向的辐射, 可以用一系列天线排成天线

3. 天线阵 半波天线对极角 θ 有一定的方向性, 对方位角没有方向性. 要得到高度定向的辐射, 可以用一系列天线排成天线阵, 利用各条天线辐射的干涉效应来获得较强的方向性.

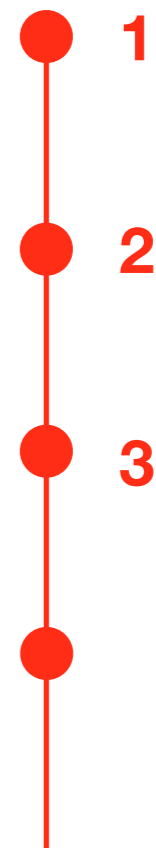
例 N 条相同天线沿极轴等距排列, 相邻天线的距离为 l , 同相激发, 求辐射角分布.

解 设最上端天线的辐射电场为 $E_0(R, \theta, \phi)$, 第二条天线的辐射与前者有相位差 $kl \cos\theta$, 余类推. 因此总辐射电场为

$$\mathbf{E} = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{E}_0 e^{imkl \cos\theta} = \mathbf{E}_0 \frac{1 - e^{iNkl \cos\theta}}{1 - e^{ikl \cos\theta}}$$

因而角分布为每条天线的角分布乘上因子

$$\int \frac{\vec{J}}{r} e^{ikr} = \int \frac{\delta(1) + \delta(2) + \cdots}{r} e^{ikr}$$





$$\left| \frac{1 - e^{iNkl \cos \theta}}{1 - e^{ikl \cos \theta}} \right|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}kl \cos \theta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}kl \cos \theta\right)}. \quad (5.14)$$

此式当

$$Nkl \cos \theta = 2m\pi, \quad m = \pm 1, \pm 2 \dots$$

时有零点, 沿这些方向的辐射为零. (5.14)式的角分布如图 5-11 所示. 由图可见角分布分为若干瓣, 辐射能量主要集中于主瓣内. 令 ψ



图 5-11

$= \frac{\pi}{2} - \theta$, 主瓣的张角 ψ 由下式确定:

$$Nkl \sin \psi = 2\pi,$$

即

$$\sin \psi = \frac{\lambda}{Nl}. \quad (5.15)$$

因此只有当 $Nl \gg \lambda$ 时, 才可以获得高度定向的辐射. 这结论和高斯光束的关系式[第四章(6.21)式]相同.

5.6 电磁波的衍射

1. 衍射问题 当电磁波在传播过程中遇到障碍物或者透过屏幕上的小孔时,会导致偏离原来入射方向的出射电磁波,这种现象称为衍射现象.衍射现象的研究对于光学和无线电波的传播都是很重要的.衍射理论的一般问题就是要计算通过障碍物或小孔后的电磁波角分布,即求出衍射图样.

几何光学的失效!

在光学中衍射理论的基础是惠更斯原理. 这原理假设光波面上每一点可以看作次级光源, 它们发射出子波, 这些子波叠加后得到向前传播的光波. 现在我们从电动力学基本原理出发导出惠更

图 5-12 表示典型的衍射问题. 设屏幕上有一小孔, 电磁波从左边入射, 我们要计算通过小孔后在屏幕右边空间各点上的电磁波场强. 这问题严格来说应该作为边值问题求解. 入射波到达屏幕时, 在幕上和小孔边缘处被反射和散射, 在幕左边的电磁场包括入射波和反射回来的波, 在幕右边是透过小孔后的电磁波. 在小孔处两边电磁场值

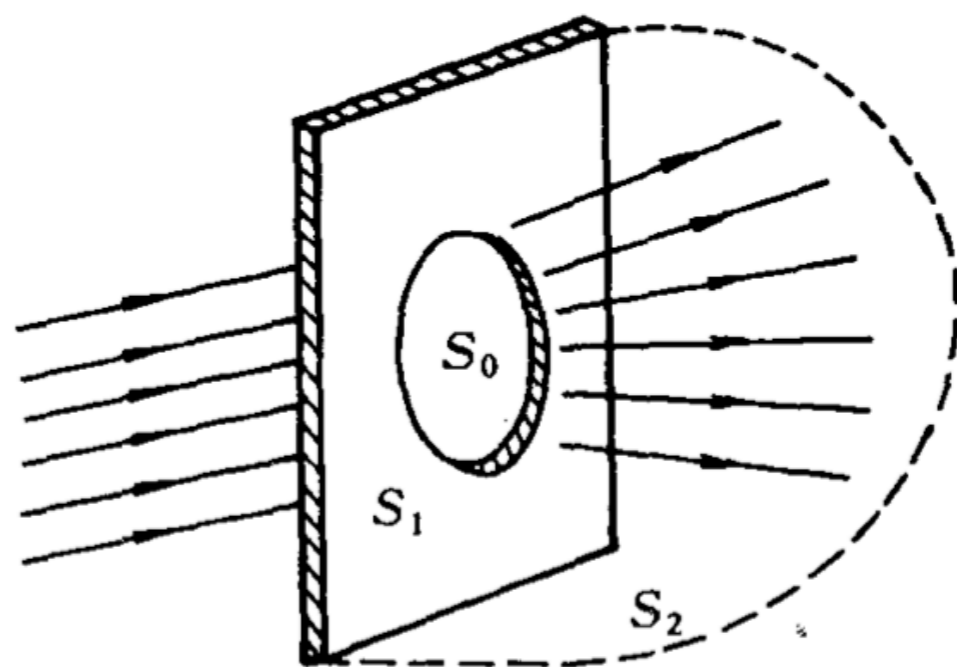


图 5-12

应该相等, 在屏幕两侧电磁场应该满足物体表面上的边界条件. 由这些条件原则上可以解出全空间中的电磁场. 但一般来说这种普遍解法是很复杂的, 实际所用的衍射理论都是一些近似解法. 近似的主要点在于假设小孔上和屏幕右侧的场强为已知, 由此求出右

射,在幕左边的电磁场包括入射波和反射回来的波,在幕右边是透过小孔后的电磁波.在小孔处两边电磁场值



图 5-12

应该相等,在屏幕两侧电磁场应该满足物体表面上的边界条件.由这些条件原则上可以解出全空间中的电磁场.但一般来说这种普遍解法是很复杂的,实际所用的衍射理论都是一些近似解法.近似的主要点在于假设小孔上和屏幕右侧的场强为已知,由此求出右半空间各点上的场强.这种求解方法实质上是把一个区域内的电磁场用其边界上的值表示出来.以下我们将推导这种关系.

电磁场由两个互相耦合的矢量场 E 和 B 构成.用严格的矢量场理论来讨论衍射问题较为复杂.一般在光学中常常忽略场的矢量性质,而把电磁场的每一直角分量看作标量场,用标量场的衍射理论来求解.当衍射角不大时这种方法是较好的近似.下面我们只推导标量衍射公式,而不去讨论较严格的矢量场衍射公式.

2. 基尔霍夫(Kirchhoff)公式 电磁场的任一直角分量 ψ 满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0. \quad (6.1)$$

如果我们忽略电磁场其它分量的影响,而孤立地把 ψ 看作一个标量场,用边界上的 ψ 和 $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ 值表出区域内的 ψ ,这种理论就是标量衍射理论.

和静电情形一样,用格林公式和格林函数方法可以把 $\psi(\mathbf{x})$ 与边界上的值联系起来.设 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 是亥姆霍兹方程的格林函数

$$\underline{(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}. \quad (6.2)$$

在(2.11)式中令 $Q(t) = 4\pi\epsilon_0 e^{-i\omega t}$,可以看出具有出射波形式的格林函数为

$$\text{推导} \quad \underline{G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{e^{ikr}}{r}}. \quad (6.3)$$

把 G 和 ψ 代入格林公式[第二章(5.13)式],并以撇号表示积分变

把 G 和 ψ 代入格林公式[第二章(5.13)式],并以撇号表示积分变量,得

$$\begin{aligned} & \int_V [\psi(\mathbf{x}') \nabla'^2 G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) - G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \nabla'^2 \psi(\mathbf{x}')] dV' \\ &= \oint_S [\psi(\mathbf{x}') \nabla' G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) - G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \nabla' \psi(\mathbf{x}')] \cdot d\mathbf{S}'. \end{aligned} \quad (6.4)$$

式中 S 是区域 V 的边界, $d\mathbf{S}'$ 是从区域 V 内指向外部的面元. 为方便起见,我们设 \mathbf{n} 是指向区域 V 内的法线,即 $d\mathbf{S}' = -\mathbf{n} dS'$. 由(6.1—6.4)式得

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \oint_S [\psi(\mathbf{x}') \nabla' \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \nabla' \psi(\mathbf{x}')] \cdot d\mathbf{S}' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{n} \cdot [\nabla' \psi + (ik - \frac{1}{r}) \frac{\mathbf{r}}{r} \psi] dS'. \end{aligned} \quad (6.5)$$

推导

这公式称为基尔霍夫公式. 这公式把区域 V 内任一点 x 处的场 $\psi(x)$ 用 V 边界面 S 上的 ψ 和 $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ 表示出来. 基尔霍夫公式是惠更斯原理的数学表示. 在(6.5)式的被积式中, 因子 $\frac{e^{ikr}}{r}$ 表示由曲面 S 上的点 x' 向 V 内 x 点传播的波, 波源的强度由 x' 点上的 ψ 和 $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ 值确定. 因此, 曲面上每一点可以看作次级光源, 区域 V 内的光波可以看作由曲面所有点上的次级光源发射的子波的叠加.

必须指出, (6.5)式不是边值问题的解, 它仅是把 ψ 用边界值表出的积分表示式, 而当问题完全解出之前, 边界上的 ψ 和 $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ 值是不知道的, 而且也是不能任意规定的. 所以, 只有在某些特殊情况下, 当我们可以合理地估计在边界 S 上的 ψ 和 $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ 值时, 才能应用(6.5)式求区域 V 内的场强. 衍射问题通常属于这种情况.

3. 小孔衍射



诸葛亮

诸葛暗

诸葛孔明



诸葛成像（丞相）

3. 小孔衍射 现在我们以小孔衍射为例说明基尔霍夫公式的应用。

设无穷大平面屏幕中部有一小孔. V 为屏幕右边空间, 其界面 S 包括三个部分: 小孔表面 S_0 , 屏幕右侧 S_1 和无穷大半球面 S_2 (图 5-12). 为了应用基尔霍夫公式, 必须对界面上的 ψ 和 $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ 值作合理的假定. 我们假设:

(1) 在孔面 S_0 上, ψ 和 $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ 等于原来入射波的值, 即和没有屏幕存在时的值相同;

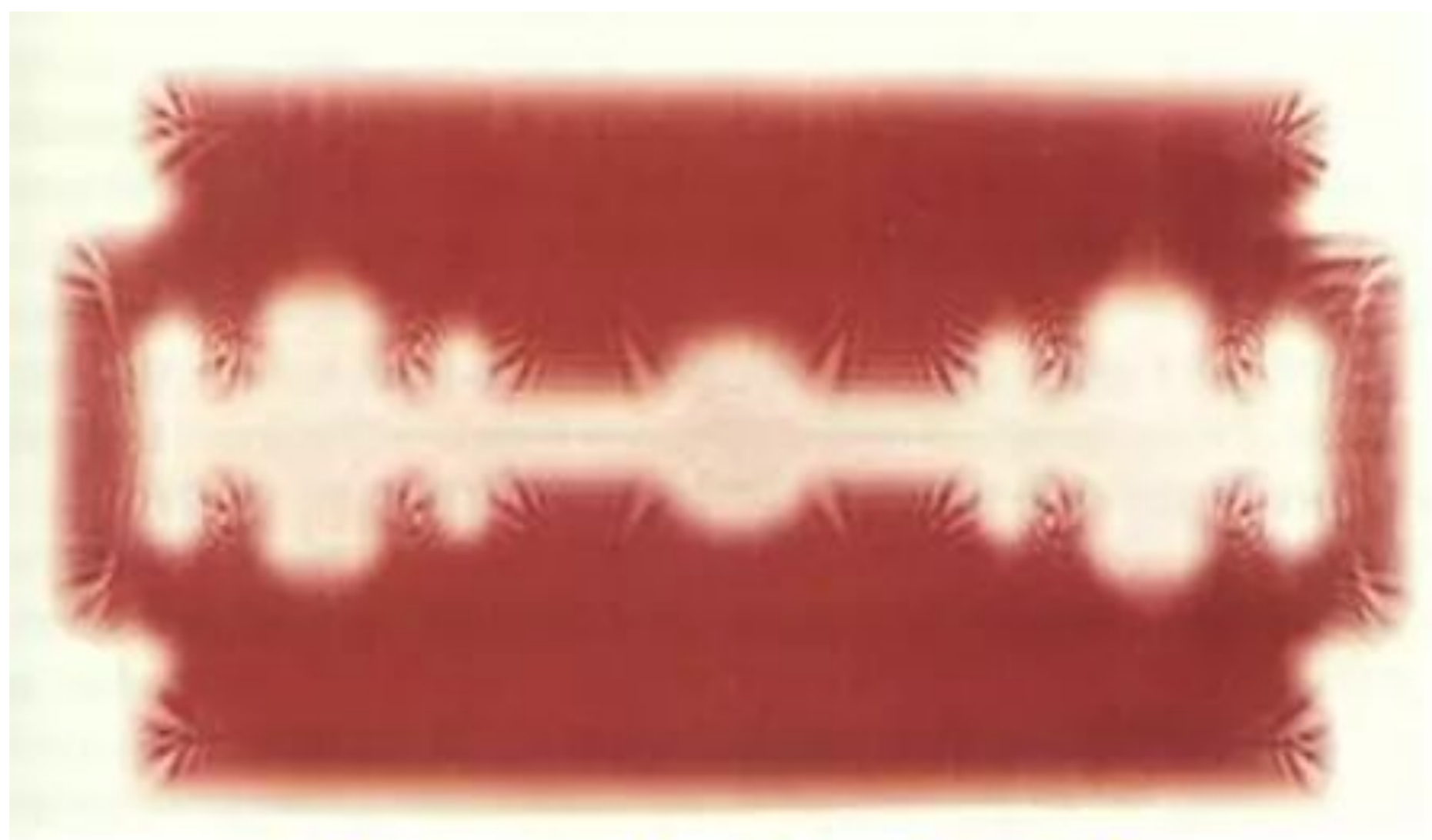
(2) 屏幕右侧 S_1 上, $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$.

这两假设都是近似的. 因为由上面的讨论, 当有屏幕存在时, 必然对原来入射波产生扰动, 特别是在孔边缘附近, 入射波受到的扰动是比较大的, 因此在孔面上 ψ 和 $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ 值不可能与原入射波的相应值完全相同. 但是当孔半径远大于波长时, 孔面大部分面积的场

(2) 屏幕右侧 S_1 上, $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$.

这两假设都是近似的. 因为由上面的讨论, 当有屏幕存在时, 必然对原来入射波产生扰动, 特别是在孔边缘附近, 入射波受到的扰动是比较大的, 因此在孔面上 ψ 和 $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ 值不可能与原入射波的相应值完全相同. 但是当孔半径远大于波长时, 孔面大部分面积的场所受的扰动不大, 因而假设(1)不会导致很大的误差. 在屏幕右侧, 实际上只有在小孔边缘附近处 ψ 和 $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ 才可能显著地不为零, 因此假设(2)也可以近似地成立.

为了由(6.5)式计算 $\psi(\mathbf{x})$, 还必须知道无穷远半球面 S_2 上的 ψ 值. 如图 5-13, 取坐标原点在孔中心处, 以 \mathbf{x}' 表示 S_2 上一点, \mathbf{x} 为区域内距离小孔有限远处任一点. 令 $R = |\mathbf{x}|$, $R' = |\mathbf{x}'|$, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. 由于在右半空间的波是由小孔区出射的波, 因此在无穷远处应有形式



剃須刀片的衍射現象

(2) 屏幕右侧 S_1 上, $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$.

这两假设都是近似的. 因为由上面的讨论, 当有屏幕存在时, 必然对原来入射波产生扰动, 特别是在孔边缘附近, 入射波受到的扰动是比较大的, 因此在孔面上 ψ 和 $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ 值不可能与原入射波的相应值完全相同. 但是当孔半径远大于波长时, 孔面大部分面积的场所受的扰动不大, 因而假设(1)不会导致很大的误差. 在屏幕右侧, 实际上只有在小孔边缘附近处 ψ 和 $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ 才可能显著地不为零, 因此假设(2)也可以近似地成立.

为了由(6.5)式计算 $\psi(\mathbf{x})$, 还必须知道无穷远半球面 S_2 上的 ψ 值. 如图 5-13, 取坐标原点在孔中心处, 以 \mathbf{x}' 表示 S_2 上一点, \mathbf{x} 为区域内距离小孔有限远处任一点. 令 $R = |\mathbf{x}|$, $R' = |\mathbf{x}'|$, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. 由于在右半空间的波是由小孔区出射的波, 因此在无穷远处应有形式

$$\psi(\mathbf{x}') = f(\theta', \phi') \frac{e^{ikR'}}{R'}, \quad (6.6)$$

$f(\theta', \phi')$ 代表与方向有关的某一函数. 在 S_2 上, 向内法线为 $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_{R'}$, 因而

$$\mathbf{n} \cdot \nabla' \psi = -\frac{\partial}{\partial R'} \psi(\mathbf{x}') = -\left(ik - \frac{1}{R'}\right) \psi. \quad (6.7)$$

在(6.5)式中, r 为由 \mathbf{x}' 到 \mathbf{x} 的距离, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{r}/r \approx \mathbf{n}$, 而且有 $1/r \approx 1/R'$, 因此在此在 S_2 上到 $O(r^{-2})$ 有

$$\mathbf{n} \cdot \left[\nabla' \psi + \left(ik - \frac{1}{r}\right) \frac{\mathbf{r}}{r} \psi \right] \approx 0,$$

因而(6.5)式在无穷大半球面 S_2 上的积分趋于零. 因此, 在(6.5)式中只剩下对孔面 S_0 的积分:

$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{n} \cdot \left[\nabla' \psi + \left(ik - \frac{1}{r}\right) \frac{\mathbf{r}}{r} \psi \right] dS'. \quad (6.8)$$

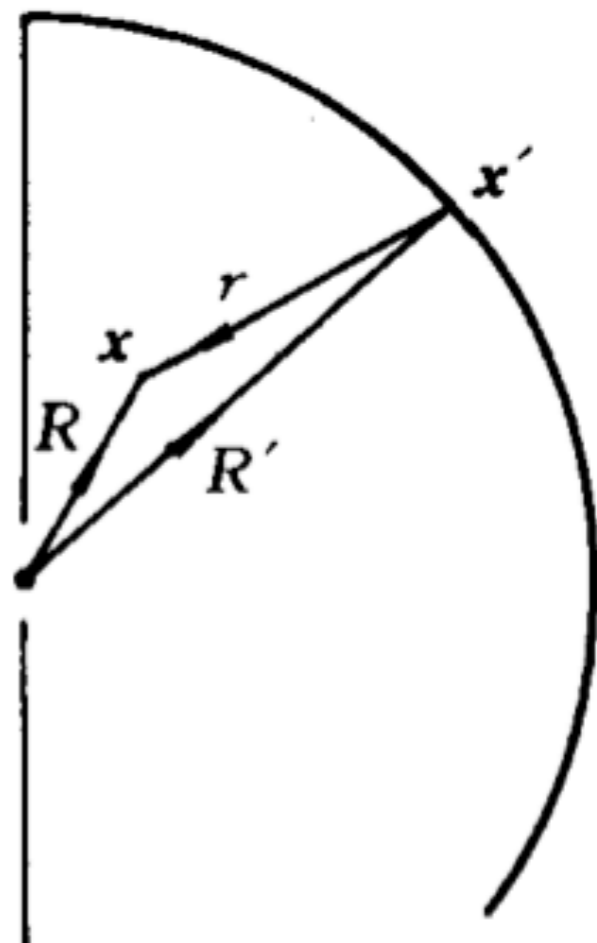


图 5-13

由假设(1),在孔面上,场强可取为入射波场强.设入射波 ψ_i 是平面波,其波矢量为 \mathbf{k}_1 ,

$$\psi_i(\mathbf{x}') = \psi_0 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}'}, \quad (6.9)$$

其中 ψ_0 为原点处的 ψ 值.在(6.8)式右边被积函数中的 ψ 可用 ψ_i 代入,并有

$$\nabla' \psi(\mathbf{x}') = i\mathbf{k}_1 \psi_0 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}'}. \quad (6.10)$$

远场衍射

设我们在屏幕右边远处观察向 \mathbf{k}_2 方向传播的衍射波[实际观察时可用透镜把衍射波聚焦,称夫琅和费(Fraunhofer)衍射].如图 5-14, \mathbf{x}' 为小孔面上一点, \mathbf{x} 为空间远处一点, \mathbf{k}_2 沿 R 方向, $r =$

$R - \frac{\mathbf{k}_2}{k} \cdot \mathbf{x}'$, $k \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{k}_2$.在(6.8)式中略去 $1/r$ 高次项,得

推导

$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{i\psi_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_{S_0} e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}'} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{n} dS'$$

$$= -\frac{i\psi_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_{S_0} e^{i(k_1 - k_2) \cdot x'} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2) dS' \quad (6.11)$$

式中 θ_1 为入射波矢 k_1 与法线 n 的夹角, θ_2 为衍射波矢 k_2 与 n 的夹角. $\cos\theta_1 + \cos\theta_2$ 称为倾斜因子.

以 $|\psi|^2$ 代表衍射光波的强度, 由(6.11)式可算出衍射光强与 θ_2 的关系, 由此可得衍射图样. 在小孔衍射情况下, 实验测得的衍射图样与计算结果相符, 说明我们所作的假设(1)和(2)是近似正确的. 在通过裂缝的微波辐射问题中, 由于涉及较大的波长和较大的衍射角, 标量理论不是很好的近似. 在这情形下我们必须从电磁场矢量方程出发, 导出矢量场的衍射公式. 关于这个问题在此不作详细讨论.

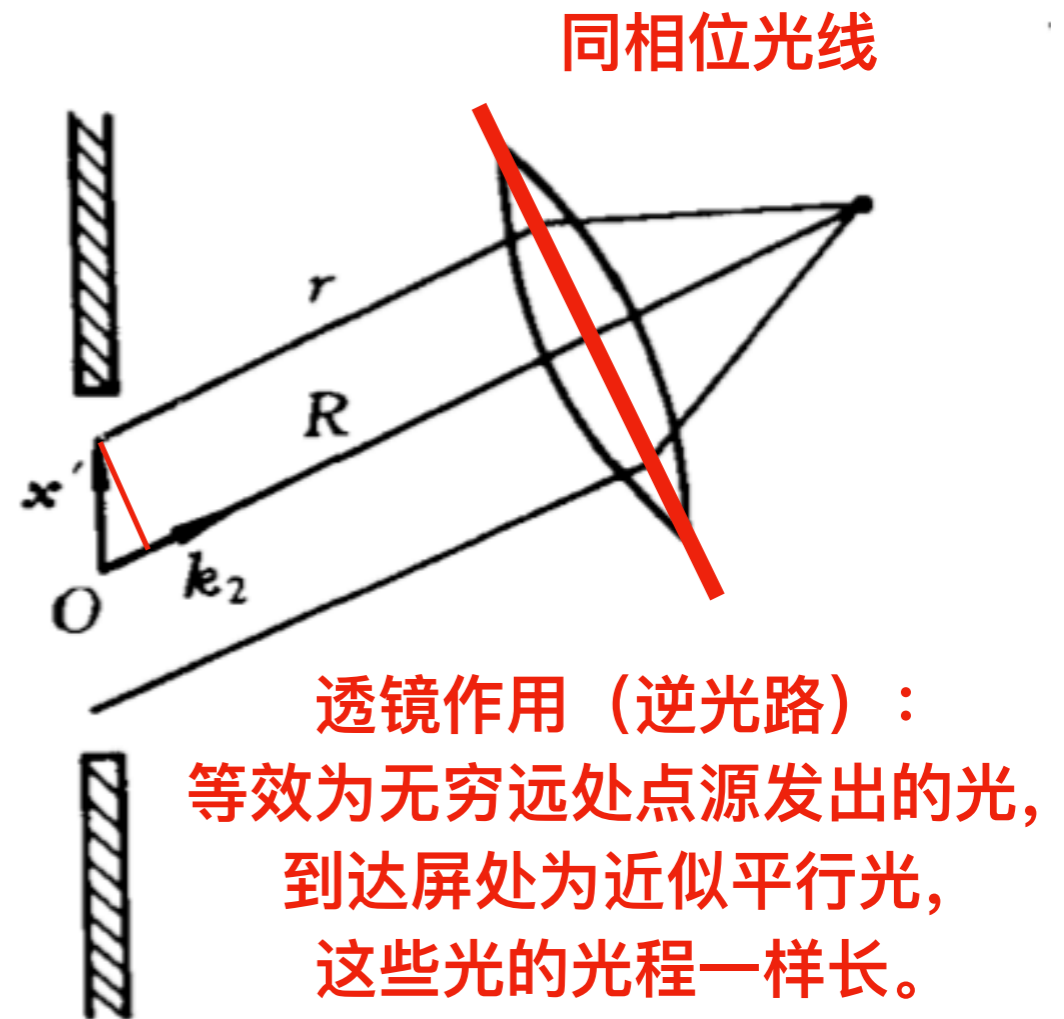


图 5-14

作业 例 波长为 λ 的平面电磁波垂直射入屏的长方形小孔上, 设小孔边长为 a 和 b ($a, b \gg \lambda$), 求夫琅和费衍射图样.

解 取小孔中心为原点, z 轴与孔面垂直. 入射波沿 z 轴方向, 有 $\cos\theta_1 = 1$. 孔面上 $z' = 0$, 因而 $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}' = 0$. 在(6.11)式中由于 θ_1 和 θ_2 与积分变数无关, 可以抽出移至积分号外, 因此

$$\psi(x) = -\frac{i\psi_0 e^{ikR}}{4\pi R} (1 + \cos\theta_2) \int_{S_0} e^{-ik_2 \cdot \mathbf{x}'} dS'. \quad (6.12)$$

上式的积分为

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a e^{-ik_{2x}x'} dx' \int_{-b}^b e^{-ik_{2y}y'} dy' \\ &= \frac{4}{k_{2x}k_{2y}} \operatorname{sink}_{2x}a \operatorname{sink}_{2y}b. \end{aligned} \quad (6.13)$$

设 \mathbf{k}_2 与 x 轴的夹角为 $\frac{\pi}{2} - \alpha$, 与 y 轴的夹角为 $\frac{\pi}{2} - \beta$, α 和 β 即为

衍射波偏离 yz 面和 xz 面的角. 因 α 和 β 为小角,

$$k_{2x} = k \sin \alpha \approx k\alpha, \quad k_{2y} = k \sin \beta \approx k\beta,$$

代入(6.13)式得

$$\frac{4}{k^2} \frac{\sin k a \alpha}{\alpha} \frac{\sin k b \beta}{\beta}. \quad (6.14)$$

$|\psi|^2$ 为光强 I , 以 I_0 表示沿 z 轴的光强 ($\theta_2 = 0, \alpha = \beta = 0$ 情形), 则衍射光强为

$$\begin{aligned} I &= I_0 \left(\frac{1 + \cos \theta_2}{2} \right)^2 \left(\frac{\sin k a \alpha}{k a \alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin k b \beta}{k b \beta} \right)^2 \\ &\approx I_0 \left(\frac{\sin k a \alpha}{k a \alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin k b \beta}{k b \beta} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

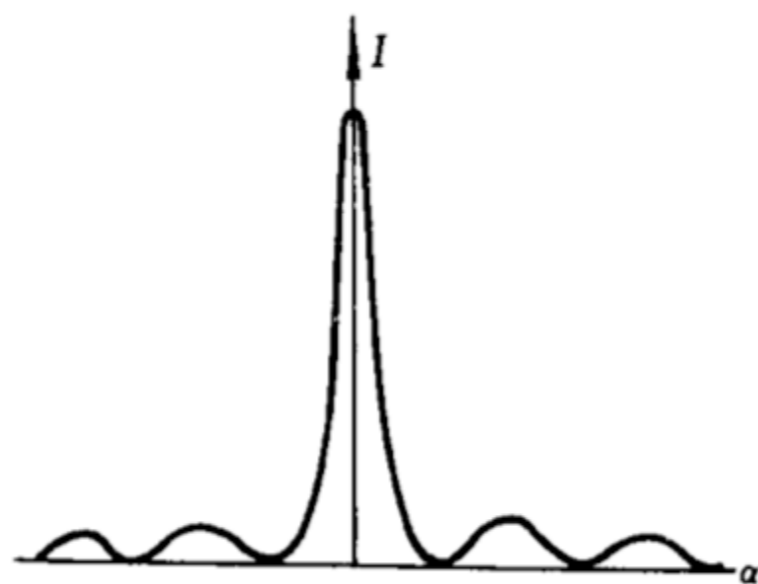


图 5-15

光强与 α 的关系如图 5-15 所示. 第一条暗纹出现在 $k a \alpha = \pi$ 处, 即 $\alpha = \lambda / 2a$. 波长愈短时, 衍射条纹愈密. (6.15) 式已相当好地为光学实验所证实.

5.7 电磁场动量

电磁场和带电物质之间有相互作用. 场对带电粒子施以作用力, 粒子受力后, 它的动量发生变化, 同时电磁场本身的状态亦发生相应的改变. 事实上, 当电磁波入射于物体上时, 物体内的带电粒子受到电磁场的作用, 使整个物体受到一定的总力. 物体受力后, 它的动量会发生变化, 同时电磁波也被反射或吸收而改变了它的空间运动状态. 在这相互作用过程中, 入射电磁场的动量转移到物体上, 同时电磁场的动量亦发生相应的改变. 因此, 电磁场也和其他物体一样具有动量. 辐射压力是电磁场带有动量的实验证据. 下面我们从电磁场与带电物质的相互作用规律导出电磁场动量密度表示式.

1. 电磁场的动量密度和动量流密度 考虑空间某一区域,其内有一定电荷分布. 区域内的场和电荷之间由于相互作用而发生动量转移. 另一方面,区域内的场和区域外的场也通过界面发生动量转移. 由于动量守恒, 单位时间从区域外通过界面 S 传入区域 V 内的动量应等于 V 内电荷的动量变化率加上 V 内电磁场的动量变化率. 由于麦克斯韦方程组是电磁场的基本动力学方程,由麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式应该可以导出电磁场和电荷体系的动量守恒定律.

电荷受电磁场的作用力由洛伦兹力公式表示. 以 f 表示作用力密度,由第一章(3.11)式,

$$f = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (7.1)$$

电荷系统受力作用后,它的动量发生变化. 由动量守恒定律,电磁场的动量也应该相应地改变. (7.1)式左边等于电荷系统的动量密度变化率,因而右边应该可以化为含有电磁场动量密度变化率和表示场内动量转移的一些量. 为此,我们用麦克斯韦方程组把(7.1)式右边完全用场量表出. 由真空中的方程

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E},$$
$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

可以把方程(7.1)化为

$$\mathbf{f} = \epsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B}. \quad (7.2)$$

利用另外两个麦氏方程

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

可以把(7.2)式写成对 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 对称的形式

$$\mathbf{f} = \left[\epsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right. \\ \left. + \epsilon_0(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E} \right] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (7.3)$$

空间分布 时间演化

由于 \mathbf{f} 等于电荷系统的动量密度改变率, 因此, 若把(7.3)式解释为动量守恒定律, 则右边最后一项撤去负号后应该代表电磁场的动量密度改变率. 因此电磁场的动量密度为

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (7.4)$$

(7.3)式方括号部分应该表示电磁场内部的动量转移. 为证明这

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (7.4)$$

(7.3)式方括号部分应该表示电磁场内部的动量转移. 为证明这点, 我们先把方括号部分变为一个张量的散度. 为此, 由矢量公式

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E} = (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \nabla E^2,$$

得

$$\begin{aligned} & (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E} \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \nabla E^2 \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{E}\mathbf{E}) - \frac{1}{2} \nabla \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{I}} E^2) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2} \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{I}} E^2). \end{aligned}$$

式中 $\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{I}}$ 是单位张量, 对任一矢量 \mathbf{v} 都有

$$\mathbf{v} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{I}} = \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

同理

$$(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{T}} B^2)$$

因此, (7.3) 式方括号部分可以化为一个张量 $-\vec{\mathcal{T}}$ 的散度,

$$\vec{\mathcal{T}} = -\epsilon_0 \mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}\mathbf{B} + \frac{1}{2} \vec{\mathcal{T}} (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2). \quad (7.5)$$

由(7.3)—(7.5)式得

$$\mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{\mathcal{T}}. \quad (7.6)$$

把此式对区域 V 积分得

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{f} dV + \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{g} dV &= - \int_V \nabla \cdot \vec{\mathcal{T}} dV \\ &= - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \vec{\mathcal{T}}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

右边是对区域边界的面积分. (7.7) 式左边是 V 内电荷系统和电

磁场的总动量变化率, 因此右边表示由 V 外通过界面 S 流进 V

内的动量流. 因此张量 $\vec{\mathcal{T}}$ 称为电磁场的动量流密度张量, 或称为

内的动量流. 因此张量 \mathcal{T} 称为电磁场的动量流密度张量, 或称为电磁场应力张量.

若区域 V 为全空间, 则面积分趋于零, 因此

$$\int \mathbf{f} dV + \frac{d}{dt} \int \mathbf{g} dV = 0.$$

此式表示电磁场和电荷的总动量变化率等于零, 这就是动量守恒定律. (7.6) 式是动量守恒定律的微分形式.

电磁场的动量密度和能流密度 \mathbf{S} 之间有一般关系式

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \quad (7.8)$$

对于平面电磁波, 有

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E},$$

式中 \mathbf{n} 为传播方向单位矢量, 代入 (7.4) 式得一定频率的电磁波的平均动量密度

$$\bar{\mathbf{g}} = \frac{\epsilon_0}{2} \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) = \frac{\epsilon_0}{2c} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{n}. \quad (7.9)$$

由于对电磁波有 $\mathbf{S} = c\omega\mathbf{n}$, ω 为能量密度, 因此

$$\mathbf{g} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}. \quad (7.10)$$

这关系在量子化后的电磁场也是成立的。量子化后的电磁场由光子组成, 每个光子的能量为 $\hbar\omega$, 其中 $\hbar = h/2\pi$, h 为普朗克常数, ω 为角频率。由(7.

10)式, 每个光子带有动量 $\hbar \frac{\omega}{c} \mathbf{n} = \hbar \mathbf{k}$ 。

下面我们说明动量流密度张量 $\vec{\mathcal{T}}$ 的意义。如图 4-16, 设 ABC 为一面元 $\Delta\mathbf{S}$, 这面元的三个分量分别等于三角形 OBC ,

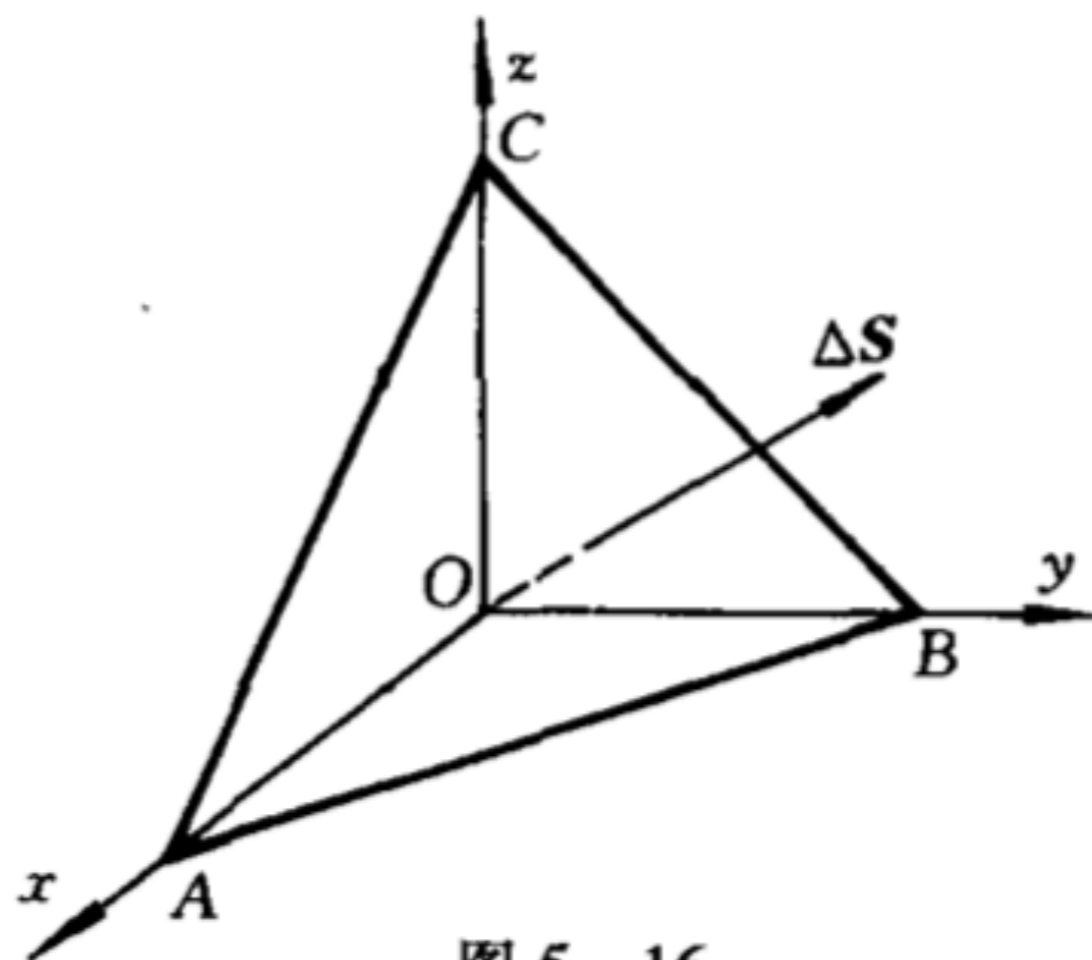


图 5-16

OCA 和 OAB 的面积。 $OABC$ 是一个体积元 ΔV 。通过界面 OBC 单位面积流入体内的动量三个分量写为

$$T_{11}, T_{12}, T_{13};$$

通过界面 OCA 单位面积流入体内的动量三个分量写为

$$T_{21}, T_{22}, T_{23};$$

通过界面 OAB 单位面积流入体内的动量三个分量写为

$$T_{31}, T_{32}, T_{33}.$$

当体积 $\Delta V \rightarrow 0$ 时, 通过这三个面流入体内的动量等于从面元 ABC 流出的动量. 因此, 通过 ABC 面流出的动量各分量为

$$\Delta p_1 = \Delta S_1 T_{11} + \Delta S_2 T_{21} + \Delta S_3 T_{31},$$

$$\Delta p_2 = \Delta S_1 T_{12} + \Delta S_2 T_{22} + \Delta S_3 T_{32},$$

$$\Delta p_3 = \Delta S_1 T_{13} + \Delta S_2 T_{23} + \Delta S_3 T_{33},$$

或写为矢量式

$$\Delta \mathbf{p} = \Delta \mathbf{S} \cdot \vec{\mathcal{T}} \quad (7.11)$$

这就是通过面元 ΔS 流出的动量. 因此, 通过闭合曲面流出的总动量为

$$\oint d\mathbf{S} \cdot \vec{\mathcal{T}}. \quad (7.12)$$

张量 $\vec{\mathcal{T}}$ 的分量 T_{ij} 的意义是通过垂直于 i 轴的单位面积流过的动量 j 分量。

例 1 求平面电磁波的动量流密度张量.

解 平面电磁波 $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k}$ 是三个互相正交的矢量, 我们就用这三个方向来分解 $\vec{\mathcal{T}}$ 的各分量. 由(7.5)式和 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, 得

$$\mathbf{E} \cdot \vec{\mathcal{T}} = -\epsilon_0 E^2 \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right). \quad (7.13)$$

平面电磁波有 $\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2$, 因而

$$\mathbf{E} \cdot \vec{\mathcal{T}} = 0.$$

同样可证

$$\mathbf{B} \cdot \vec{\mathcal{T}} = 0, \quad \vec{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{E} = \vec{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{B} = 0.$$

因而 $\vec{\mathcal{T}}$ 只有沿 \mathbf{k} 的分量. 用 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$, 可求得

$$\mathbf{k} \cdot \vec{\mathcal{T}} = \vec{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{k} = \frac{1}{2} \mathbf{k} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) = \omega \mathbf{k}.$$

因而

$$\vec{\mathcal{T}} = \omega \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = c g \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k. \quad (7.14)$$

式中 \mathbf{e}_k 为波矢 \mathbf{k} 方向的单位矢量, g 为动量密度 [见 (7.10) 式]. 若选 \mathbf{k} 方向为 z 轴, 则 \mathcal{T} 只有 T_{33} 分量, $T_{33} = cg$.

$\vec{\mathcal{T}}$ 表示式 (7.14) 中的第二个 \mathbf{e}_k 表示电磁波动量沿波矢方向, 第一个 \mathbf{e}_k 表示只有对垂直于波矢的面才有动量通过, 在侧面上是没有动量转移的. 电磁波带动量密度 g , 传播速度 c , 因此每秒垂直流过单位截面的动量数值为 cg .

2. 辐射压力 由于电磁波具有动量,它入射于物体上时会对物体施加一定的压力,这种压力称为辐射压力.由电磁波动量密度(7.10)式和动量守恒定律可以算出辐射压强.

讲解 例 2 平面电磁波入射于理想导体表面上而被全部反射,设入射角为 θ ,求导体表面所受的辐射压强.

解 把入射波动量分解为垂直于表面的分量和与表面相切的分量.电磁波被反射后,动量的切向分量不变,而法向分量变号.由于电磁波速度为 c ,由(7.10)式,每秒通过单位横截面的平面波的动量为

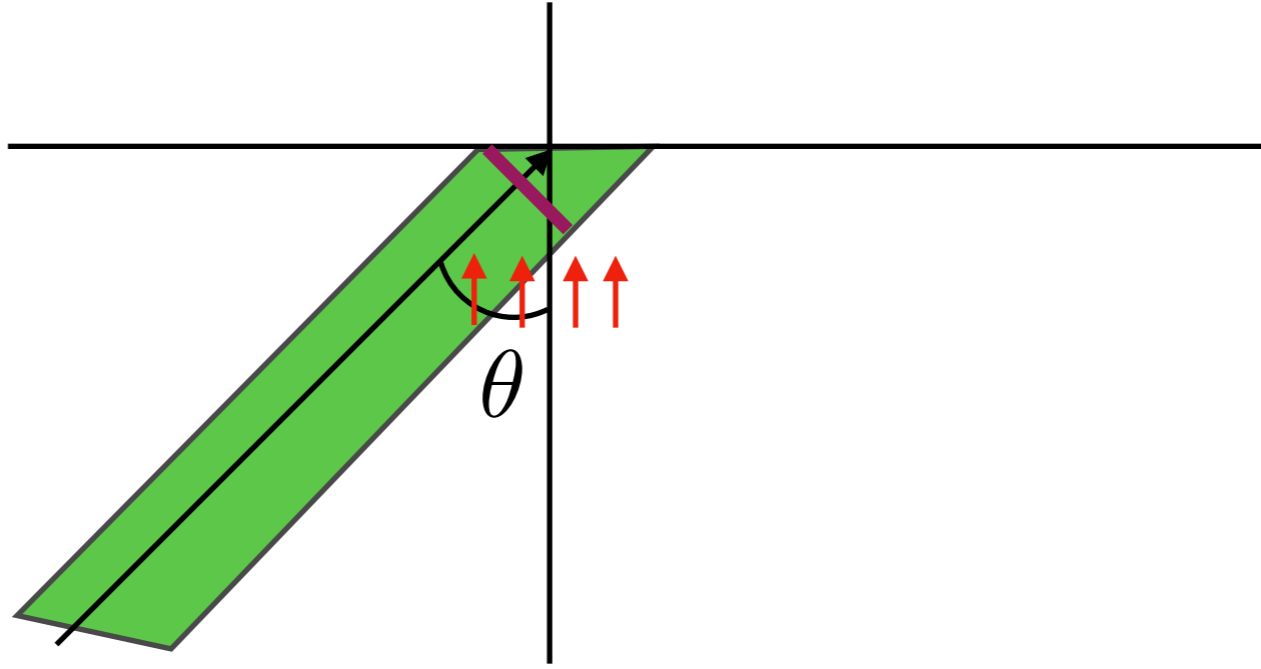
$$\bar{g}c = \bar{w}_i,$$

其中 \bar{w}_i 为入射波平均能量密度.上式的法向分量为 $\bar{w}_i \cos\theta$.由于这部分动量实际上入射于导体表面 $1/\cos\theta$ 的面积上,因此,每秒入射于导体表面单位面积的动量法向分量为

$$\bar{w}_i \cos^2\theta.$$

在反射过程中,电磁波动量变化率为上式的二倍,即 $2\bar{w}_i \cos^2\theta$.由动量守恒定律,导体面所受的辐射压强为

$$P = 2\bar{w}_i \cos^2\theta. \quad (7.15)$$



$$P = 2\bar{\omega}_i \cos^2 \theta. \quad (7.15)$$

在导体外部,总电场为入射波电场 E_i 加上反射波电场 E_r ,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r,$$

$$E^2 = E_i^2 + E_r^2 + 2\text{Re}(\mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{E}_r).$$

上式最后一项是干涉项,它表现为导体表面外强弱相间的能量分布.对空间各点平均后此项贡献为零.因此在导体表面附近总平均能量密度 $\bar{\omega}$ 等于入射波能量密度 $\bar{\omega}_i$ 加上反射波能量密度 $\bar{\omega}_r$.在全部反射情形中即等于入射能量密度的二倍.因此由(7.15)式

$$P = \bar{\omega} \cos^2 \theta. \quad (7.16)$$

若电磁波从各方向入射,对 θ 平均后得

$$P = \frac{\bar{\omega}}{3}. \quad (7.17)$$

不难看出,在表面完全吸收电磁波的情况,上式仍然是成立的.(7.17)式是黑体辐射对界面所施压强的公式.

由动量流密度张量 $\vec{\mathcal{T}}$ 可以较简单地得出以上结果. 设 E_i 垂直入射面, 在完全反射情形中有 $E_r = -E_i$, 因而界面上总电场强度 $E = 0$, 总磁场为 $B = 2B_i \cos\theta$, B 与界面相切. 设 n 为指向导体内的法线, 有 $n \cdot E = n \cdot B = 0$, 因而

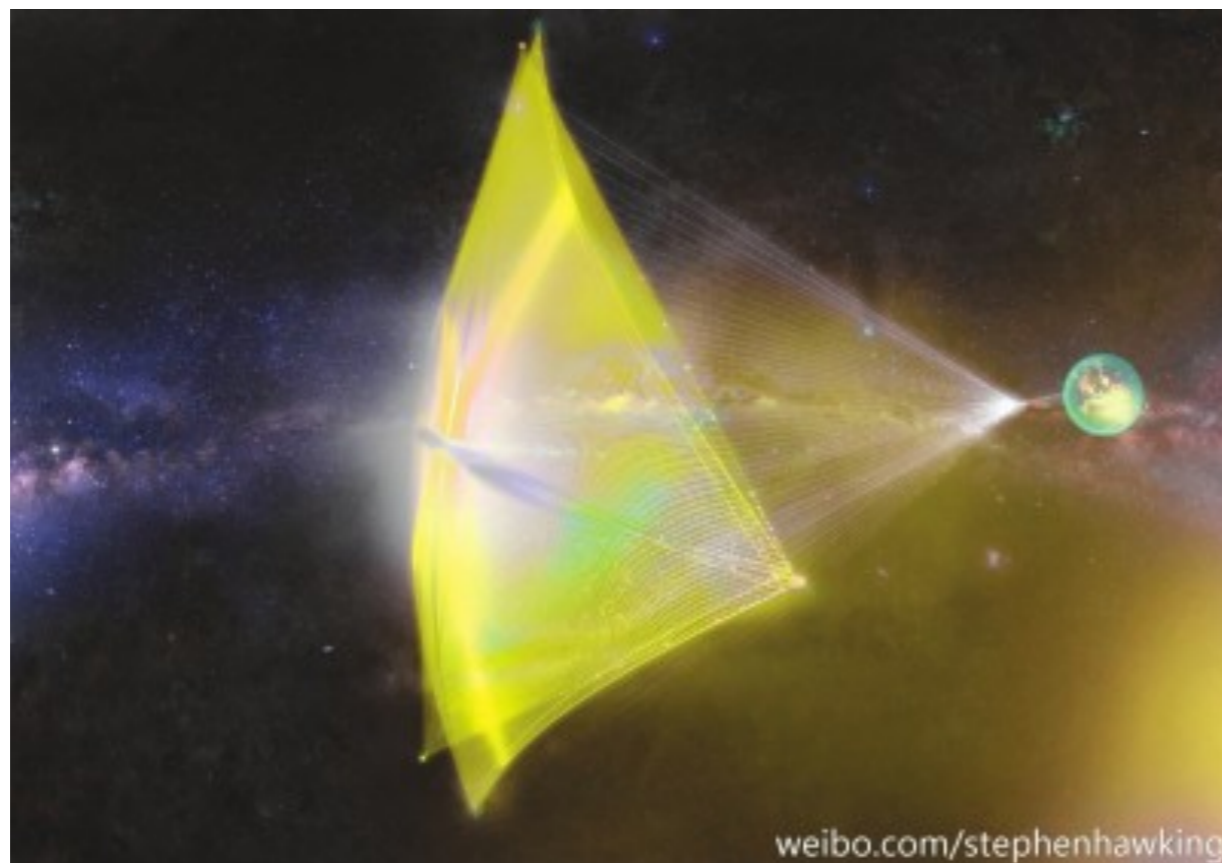
$$n \cdot \vec{\mathcal{T}} = \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{\mu_0} B^2 \right) = \frac{2}{\mu_0} B_i^2 \cos^2 \theta n = 2\bar{w}_i \cos^2 \theta n,$$

因而导体面受到压强

$$P = 2\bar{w}_i \cos^2 \theta,$$

与(7.15)式相符.

在一般光波和无线电波情形中, 辐射压强是不大的. 例如太阳辐射在地球表面上的能流密度为 $1.35 \times 10^3 \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$, 算出辐射压强仅为 $\sim 10^{-6} \text{Pa}$. 但是近年制成的激光器能产生聚集的强光, 可以在小面积上产生巨大的辐射压力. 在天文领域, 光压起着重要作用. 光压在星体内部可以和万有引力相抗衡, 从而对星体构造和发展起着重要作用. 在微观领域, 电磁场的动量也表现得很明显. 带有动量 $\hbar k$ 的光子与电子碰撞时服从能量和动量守恒定律, 正如其他粒子相互碰撞情形一样.



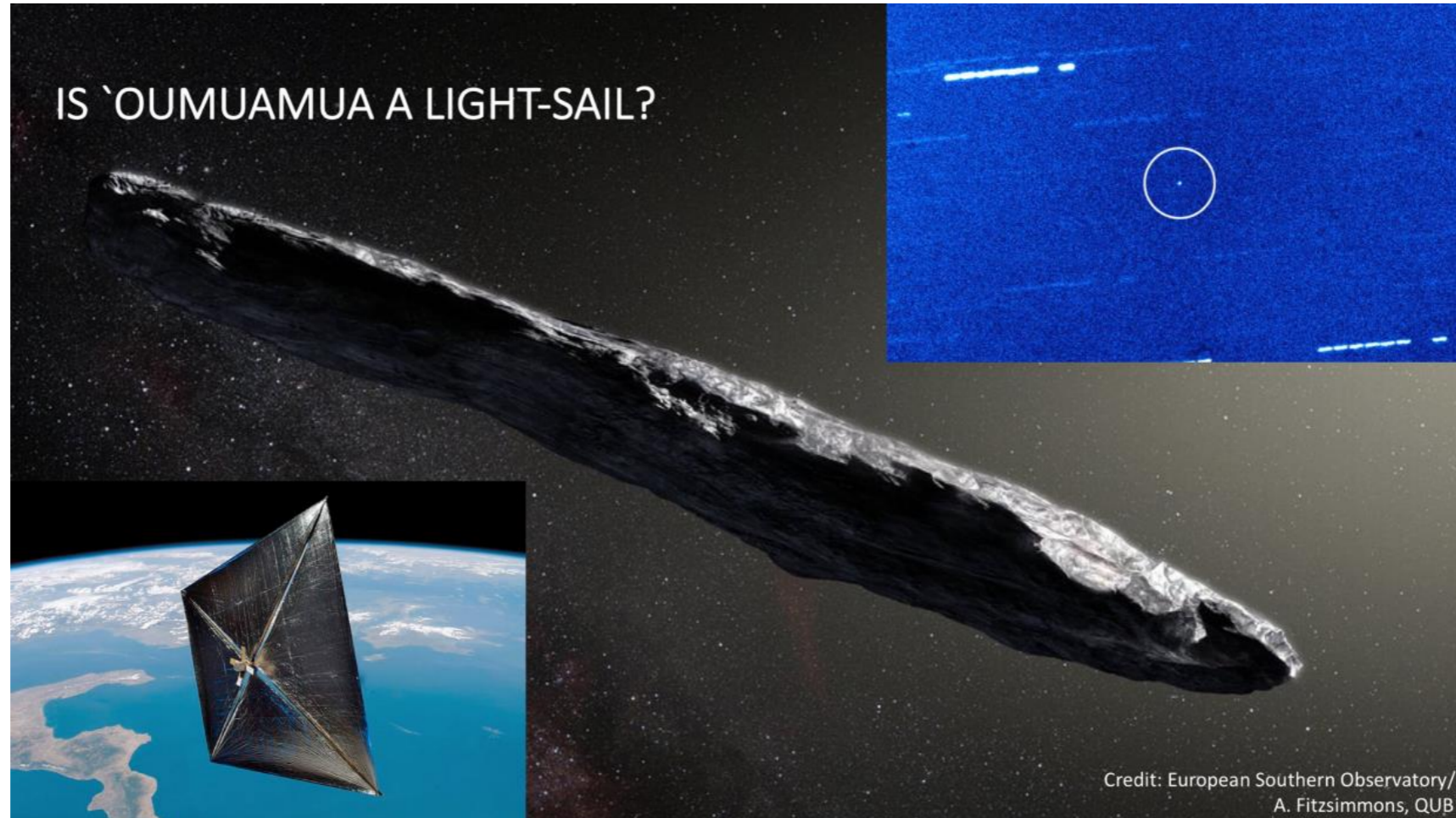
“突破摄星”

简单地说，就是研发出质量为克级、邮票大小的自动化太空探测飞行器，由激光阵列驱动纳米光帆，加速到五分之一光速，如果成功的话，约20年后到达半人马座阿尔法星，拍下影像传回地球。



奥陌陌（‘Oumuamua，别名C/2017 U1 (PANSTARRS)、A/2017 U1、1I/2017 U1）是已知的第一颗经过**太阳系**的星际天体。‘Oumuamua在夏威夷语中意为“侦查兵”或“信使”。2017年10月19日，被科学家们发现。‘Oumuamua直径在百米级，以每秒26**公里**左右的速度从**天琴座**方向冲进太阳系，近乎与**黄道面**垂直。呈现一个雪茄状，大约长400米，宽40米，颜色偏红，具有固态表面，但是不能区分或**岩石**或**金属**构成。是人类首次在太阳系内发现系外天体

On 'Oumuamua by [Abraham \(Avi\) Loeb, Harvard University \(Nov 5, 2018\)](#)



My approach to the puzzling properties of 'Oumuamua is purely scientific and evidence-based. I follow the maxim of Sherlock Holmes: "... when you have excluded the impossible, whatever remains, however improbable, must be the truth."

Are we alone? [Our new paper](#) suggests that the first evidence for an extraterrestrial technology may have just passed by the Earth a year ago. The object was dubbed 'Oumuamua by the Pan-STARRS collaboration which spotted it on an orbit originating from outside the Solar System.

Since its discovery, 'Oumuamua showed unusual features. These features make 'Oumuamua weird, belonging to a class of objects that we had never seen before. Based on its reflection of sunlight, it was inferred to be much more elongated or flattened than any known asteroid or comet in the Solar System. We do not have an image of it. The information about its shape stems from the variation in reflected sunlight as it spins. Even a thin sheet that is folded as an umbrella might appear from a distance similar to a rotating cigar based on the variation of reflected sunlight.

cosmic pie

