

电动力学B

Bin HU

bhu@bnu.edu.cn

Astro@BNU

Office: 南院F座101

4. 电磁波的传播

在迅变情况下，电场和磁场相互激发，电磁场以波动形式传播

4.1 平面电磁波

现在我们研究在没有电荷电流分布的自由空间(或均匀介质)中的电磁场运动形式. 在自由空间中, 电场和磁场互相激发, 电磁场的运动规律是齐次的麦克斯韦方程组($\rho=0, \mathbf{J}=0$ 情形):

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\tag{1.2}$$

先讨论真空情形. 在真空中, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. 取(1.2)第一式的旋度并利用第二式得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (1.3)$$

用矢量分析公式及 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E},$$

代入(1.3)式得电场 \mathbf{E} 的偏微分方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.4a)$$

同样, 在方程组(1.2)中消去电场, 可得磁场 \mathbf{B} 的偏微分方程

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.4b)$$

令

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad (1.5)$$

则 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的方程可以写为

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

形式如(1.6)的方程称为波动方程,其解包括各种形式的电磁波, c 是电磁波在真空中的传播速度.在真空中,一切电磁波(包括各种频率范围的电磁波,如无线电波、光波、X射线和 γ 射线等)都以速度 c 传播, c 是最基本的物理常量之一.

dispersion: 不同频率的光, 速度不同

现在讨论介质情形. 研究介质中的电磁波传播问题时, 必须给出 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 的关系以及 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 的关系. 当以一定角频率 ω 作正弦振荡的电磁波入射于介质内时, 介质内的束缚电荷受电场作用, 亦以相同频率作正弦振动. 在这频率下介质的极化率 $\chi_e(\omega)$ 为极化强度 \mathbf{P} 与 $\epsilon_0 \mathbf{E}$ 之比, 由此可得到这频率下的电容率 $\epsilon(\omega)$. 在线性介质中有关系

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega). \quad (1.7)$$

同样,

$$\mathbf{B}(\omega) = \mu(\omega) \mathbf{H}(\omega). \quad (1.8)$$

由介质的微观结构可以推论, 对不同频率的电磁波, 介质的电容率是不同的, 即 ϵ 和 μ 是 ω 的函数(见第七章 § 6)

$$\epsilon = \epsilon(\omega), \quad \mu = \mu(\omega). \quad (1.9)$$

ϵ 和 μ 随频率而变的现象称为介质的色散. 由于色散, 对一般非正弦变化的电场 $\mathbf{E}(t)$, 关系式 $\mathbf{D}(t) = \epsilon \mathbf{E}(t)$ 不成立. 因此在介质内, 不能够推出 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的一般波动方程[即(1.4)式中把 $\mu_0 \epsilon_0 \rightarrow \mu \epsilon$ 的方程]. 下面我们只讨论一定频率的电磁波在介质中的传播.

单色波

2. 时谐电磁波 在很多实际情况下,电磁波的激发源往往以大致确定的频率作正弦振荡,因而辐射出的电磁波也以相同频率作正弦振荡.例如无线电广播或通讯的载波,激光器辐射出的光束等,都接近于正弦波.这种以一定频率作正弦振荡的波称为时谐电磁波(单色波).在一般情况下,即使电磁波不是单色波,它也可以用傅里叶(Fourier)分析(频谱分析)方法分解为不同频率的正弦波的叠加.因此,下面我们只讨论一定频率的电磁波.设角频率为 ω , 电磁场对时间的依赖关系是 $\cos\omega t$, 或用复数形式表为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{B}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}.\end{aligned}\tag{1.10}$$

在上式中,我们用同一个符号 \mathbf{E} 表示抽出时间因子 $e^{-i\omega t}$ 以后的电场强度,一般不致发生混淆.

现在我们研究时谐情形下的麦氏方程组.在一定频率下,有 $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$,把(1.10)式代入(1.2)式,消去共同因子 $e^{-i\omega t}$ 后得

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= -i\omega\epsilon\mathbf{E}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0.\end{aligned}\tag{1.11}$$

先注意一点.在 $\omega \neq 0$ 的时谐电磁波情形下这组方程不是独立的.取第一式的散度,由于 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$,因而 $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$,即得第四式.同样,由第二式可导出第三式.因此,在一定频率下,只有第一、二式是独立的,其他两式可由以上两式导出.

取第一式旋度并用第二式得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E}.\tag{1.12}$$

由 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$,上式变为

第四式. 同样, 由第二式可导出第三式. 因此, 在一定频率下, 只有第一、二式是独立的, 其他两式可由以上两式导出.

取第一式旋度并用第二式得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E}. \quad (1.12)$$

由 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$, 上式变为

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad (1.13)$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}. \quad (1.14)$$

注意(1.13)式只有在加上条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 以后才相当于(1.12)式, (1.13)式本身的解并不保证满足 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. 因此, 对(1.13)式的解必须加上条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 才代表电磁波的解.

解出 \mathbf{E} 后, 磁场 \mathbf{B} 可由(1.11)第一式求出,

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{i}{k} \sqrt{\mu \epsilon} \nabla \times \mathbf{E}. \quad (1.15)$$

方程(1.13)式称为亥姆霍兹(Helmholtz)方程, 是一定频率下电磁波的基本方程, 其解 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ 代表电磁波场强在空间中的分布情况, 每一种可能的形式称为一种波模. 概括起来, 在一定频率下,

麦氏方程组化为以下方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0,$$

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E}.$$

亥姆霍兹方程(1.13)的每一个满足 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 的解都代表一种可能存在的波模.

类似地,也可以把麦氏方程组在一定频率下化为

$$\nabla^2 \mathbf{B} + k^2 \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\mathbf{E} = \frac{i}{\omega \mu \epsilon} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{i}{k \sqrt{\mu \epsilon}} \nabla \times \mathbf{B}. \quad (1.16)$$

(平面波是时谐波的一种情况, 其他的如: 球面波)

3. 平面电磁波 按照激发和传播条件的不同, 电磁波的场强 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ 可以有各种不同形式. 例如从广播天线发射出的球面波, 沿传输线或波导定向传播的波, 由激光器激发的狭窄光束等, 其场强都是亥姆霍兹方程(1.13)的解. 现在我们讨论一种最基本的解, 它是存在于全空间中的平面波. 设电磁波沿 x 轴方向传播, 其场强在与 x 轴正交的平面上各点具有相同的值, 即 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 仅与 x, t 有关, 而与 y, z 无关. 这种电磁波称为平面电磁波, 其波阵面(等相位点组成的面)为与 x 轴正交的平面. 在这情形下亥姆霍兹方程化为一维的常微分方程

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{E}(\mathbf{x}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.17)$$

它的一个解是

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 e^{ikx}. \quad (1.18)$$

由(1.10)式, 场强的全表示式为

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}. \quad (1.19)$$

由条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 得 $ike_x \cdot \mathbf{E} = 0$, 即要求 $E_x = 0$. 因此, 只要 \mathbf{E}_0 与 x 轴垂直, (1.19)式就代表一种可能的模式. 式中 \mathbf{E}_0 是电场的振

Compare w. static solution!

幅, $e^{i(kx - \omega t)}$ 代表波动的相位因子.

以上为了运算方便采用了复数形式, 对于实际存在的场强应理解为只取上式的实数部分, 即

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t). \quad (1.20)$$

现在我们看相位因子 $\cos(kx - \omega t)$ 的意义. 在时刻 $t = 0$, 相位因子是 $\cos kx$, $x = 0$ 的平面处于波峰. 在另一时刻 t , 相位因子变为 $\cos(kx - \omega t)$, 波峰移至 $kx - \omega t = 0$ 处, 即移至 $x = \frac{\omega}{k}t$ 的平面上.

因此, (1.19) 式表示一个沿 x 轴方向传播的平面波, 其相速度为

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (1.21)$$

真空中电磁波的传播速度为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}. \quad (1.22)$$

介质中电磁波的传播速度为

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}}. \quad (1.23)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (1.22)$$

介质中电磁波的传播速度为

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}. \quad (1.23)$$

式中 ϵ_r 和 μ_r 分别代表介质的相对电容率和相对磁导率, 由于它们是频率 ω 的函数, 因此在介质中不同频率的电磁波有不同的相速度, 这就是介质的色散现象.

在(1.19)式中, 我们选择了一个特殊坐标系, 它的 x 轴沿电磁波传播方向. 在一般坐标系下平面电磁波的表示式是

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}. \quad (1.24)$$

式中 \mathbf{k} 是沿电磁波传播方向的一个矢量, 其量值为 $|\mathbf{k}| = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$. 在特殊坐标系下, 当 \mathbf{k} 的方向取为 x 轴时, 有 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = kx$, 因而(1.24)式变为(1.19)式. 由图 4-1 可以看出(1.24)式表示沿 \mathbf{k} 方向传播的平面电磁波. 取垂直于矢量 \mathbf{k} 的任一平面 S , 设 P 为此平面上的任一点, 位矢为 \mathbf{x} , 则 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = kx'$, x' 为 \mathbf{x} 在矢量 \mathbf{k} 上的投影, 在平面 S 上任意点的位矢在 \mathbf{k} 上的投影都等于 x' , 因而整

个平面 S 是等相面. 因此, (1.24) 式表示沿矢量 k 方向传播的平面波. k 称为波矢量, 其量值 k 称为波数. 沿电磁波传播方向相距为 $\Delta x = 2\pi / k$ 的两点有相位差 2π , 因此 $2\pi / k$ 是电磁波的波长 λ

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (1.25)$$

对(1.24)式必须加上条件

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 才得到电磁波解. 取

(1.24)式的散度

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot \nabla e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E},$$

因此

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (1.26)$$

上式表示电场波动是横波, \mathbf{E} 可在垂直于 \mathbf{k} 的任意方向上振荡. \mathbf{E} 的取向称为电磁波的偏振方向. 可以选与 \mathbf{k} 垂直的任意两个互相

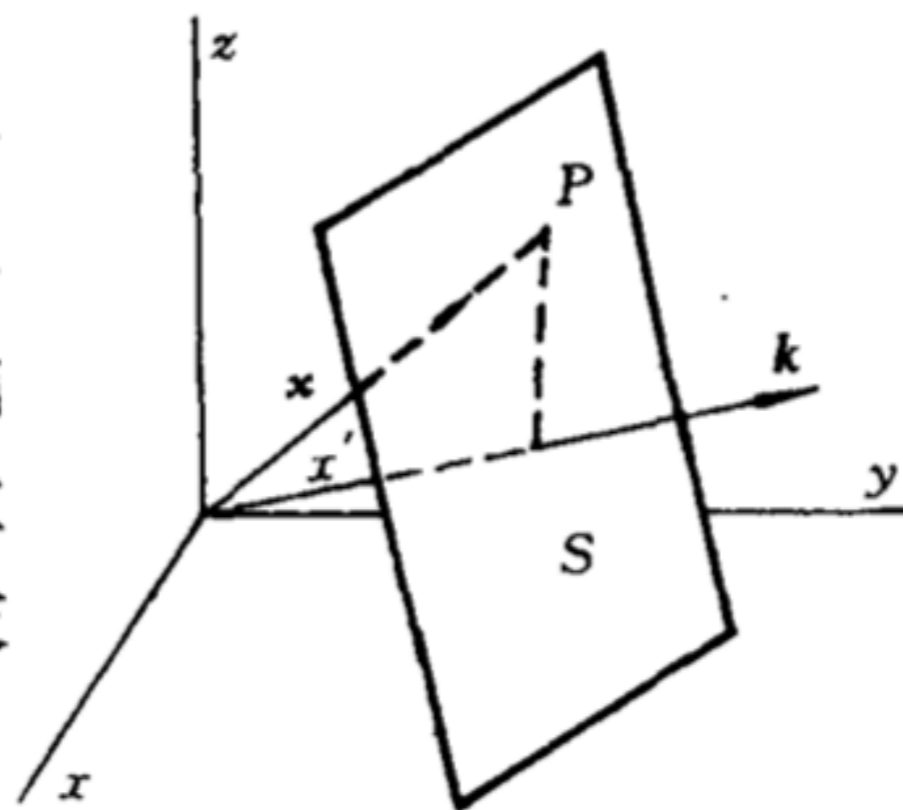


图 4-1

polarization, stokes param $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$. (1.26)

上式表示电场波动是横波, \mathbf{E} 可在垂直于 \mathbf{k} 的任意方向上振荡. \mathbf{E} 的取向称为电磁波的偏振方向. 可以选与 \mathbf{k} 垂直的任意两个互相正交的方向作为 \mathbf{E} 的两个独立偏振方向. 因此, 对每一波矢量 \mathbf{k} , 存在两个独立的偏振波.

平面电磁波的磁场可由(1.15)式求出. 取(1.24)式的旋度得

$$\nabla \times \mathbf{E} = [\nabla e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}] \times \mathbf{E}_0 = i\mathbf{k} \times \mathbf{E},$$

代入(1.15)式得

$$\mathbf{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E} = \sqrt{\mu\epsilon} \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \quad (1.27)$$

\mathbf{n} 为传播方向的单位矢量. 由上式得 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$, 因此磁场波动也是横波. \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{k} 是三个互相正交的矢量. \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 同相, 振幅比为

$$\left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = v. \quad (1.28)$$

在真空中, 平面电磁波的电场与磁场比值为

Intensity tensor

$$I_{ab} = \frac{1}{2} I \sigma_0 + P_{ab}$$

Total Intensity

Polarization tensor

I ~ Electric field²

[why electric field not
magnetic field?]

$$P_{ab} = \frac{1}{2} (Q \sigma_3 + U \sigma_1 - V \sigma_2)$$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Q, U, V Stokes parameters

Q: linear polarization; U linear polarization rotated of 45°

V circular polarization

Not convenient under rotations

the phase difference is hard to measure, the alternative description called a **Stokes vector** is often used.

Stokes Vector consists of four parameters (called **Stokes parameters**):

intensity I ,

the degree of polarization Q ,

the plane of polarization U ,

the ellipticity V .

Notation

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \{I, Q, U, V\}$$

- **Stokes parameters** are defined via the intensities which can be measured:

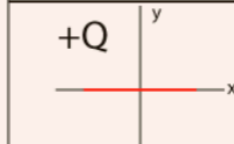
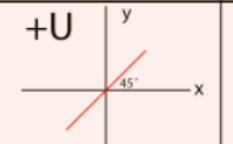
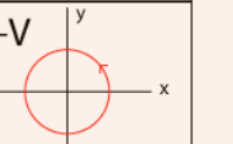
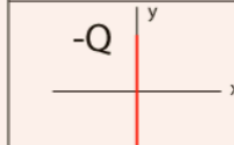
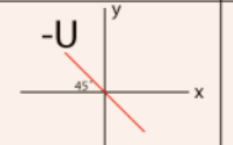
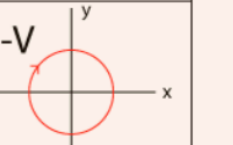
I = total intensity

$Q = I_0 - I_{90}$ = differences in intensities between horizontal and vertical linearly polarized components;

$U = I_{+45} - I_{-45}$ = differences in intensities between linearly polarized components oriented at $+45^\circ$ and -45°

$V = I_{rcl} - I_{lcr}$ = differences in intensities between right and left circular polarized components.

STOKES PARAMETERS FORMALISM

| 100% Q | 100% U | 100% V |
|--|--|--|
|  <p style="font-size: small;">+Q</p> <p style="font-size: x-small;">Q > 0; U = 0; V = 0 (a)</p> |  <p style="font-size: small;">+U</p> <p style="font-size: x-small;">Q = 0; U > 0; V = 0 (c)</p> |  <p style="font-size: small;">+V</p> <p style="font-size: x-small;">Q = 0; U = 0; V > 0 (e)</p> |
|  <p style="font-size: small;">-Q</p> <p style="font-size: x-small;">Q < 0; U = 0; V = 0 (b)</p> |  <p style="font-size: small;">-U</p> <p style="font-size: x-small;">Q = 0; U < 0; V = 0 (d)</p> |  <p style="font-size: small;">-V</p> <p style="font-size: x-small;">Q = 0; U = 0; V < 0 (f)</p> |

$\left\{ \begin{matrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{matrix} \right\}$

- ★ I , intensity
- ★ Q, U , linear polarization
- ★ V , circular polarization

★ in the case of the CMB, $V = 0$

$$\left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c. \quad (1.29)$$

(用高斯单位制时,此比值为 1,即电场与磁场量值相等.)

概括平面电磁波的特性如下:

- (1) 电磁波为横波, \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 都与传播方向垂直;
- (2) \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 互相垂直, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 沿波矢 \mathbf{k} 方向;
- (3) \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 同相, 振幅比为 v .

平面电磁波沿传播方向各点上的电场和磁场瞬时值如图 4-2 所示. 随着时间的推移, 整个波形向 x 轴方向以速度 $v = c / \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ 移动.

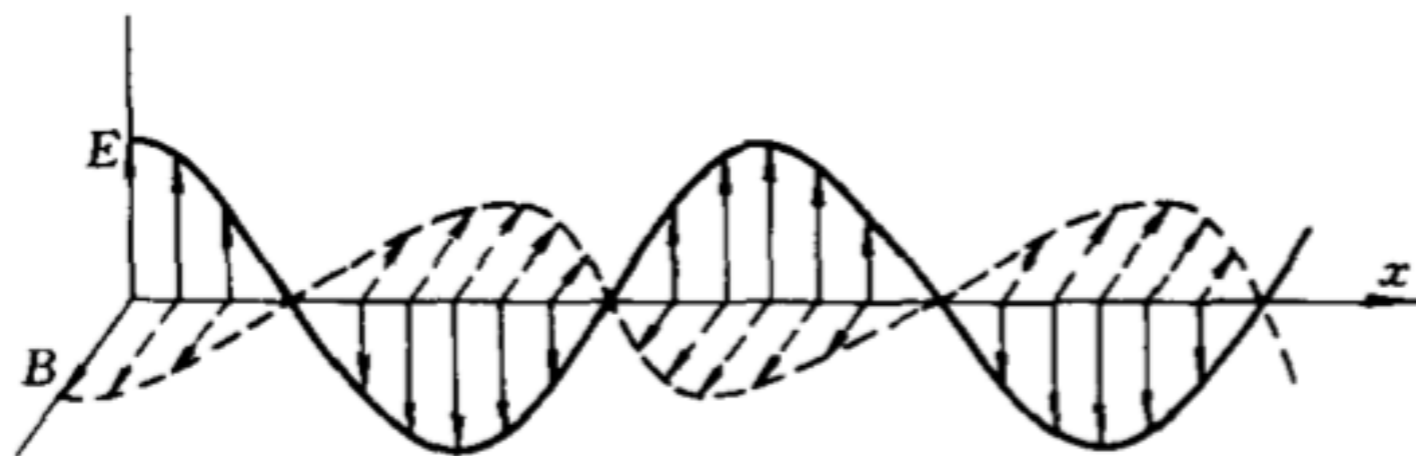


图 4-2

(E,B)是交变的，自然的会有二者能量相等！

4. 电磁波的能量和能流 由第一章(6.12)式,电磁场的能量密度为

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right).$$

在平面电磁波情形,由(1.28)式有 $\epsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2$,因此平面电磁波中 电场能量和磁场能量相等,有

$$w = \epsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2. \quad (1.30)$$

把(1.27)式代入第一章(6.8)式,并注意到(1.26)式,得平面电磁波的能流密度

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \mathbf{n}.$$

$$E^2 = \vec{E}^* \cdot \vec{E}$$

由(1.30)式得

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \omega \mathbf{n} = v \omega \mathbf{n}. \quad (1.31)$$

v 为电磁波在介质中的相速.

由于能量密度和能流密度是场强的二次式, 不能把场强的复数表示直接代入. 计算 w 和 \mathbf{S} 的瞬时值时, 应把实数表示代入, 得

$$w = \epsilon E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 [1 + \cos 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)],$$

w 和 \mathbf{S} 都是随时间迅速脉动的量, 实际上我们只需用到它们的时间平均值. 为了以后应用, 这里给出二次式求平均值的一般公式. 设 $f(t)$ 和 $g(t)$ 有复数表示

$$f(t) = f_0 e^{-i\omega t}, \quad g(t) = g_0 e^{-i\omega t + i\phi},$$

ϕ 是 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的相位差. fg 对一周期的平均值为

$$\begin{aligned} \overline{fg} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt f_0 \cos \omega t \cdot g_0 \cos(\omega t - \phi) \\ &= \frac{1}{2} f_0 g_0 \cos \phi = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(f^* g). \end{aligned} \quad (1.32)$$

式中 f^* 表示 f 的复共轭, Re 表示实数部分.

由此, 能量密度和能流密度的平均值为

$$f(t) = f_0 e^{-i\omega t}, \quad g(t) = g_0 e^{-i\omega t + i\phi},$$

ϕ 是 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的相位差. fg 对一周期的平均值为

$$\begin{aligned} \overline{fg} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt f_0 \cos \omega t \cdot g_0 \cos(\omega t - \phi) \\ &= \frac{1}{2} f_0 g_0 \cos \phi = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(f^* g). \end{aligned} \quad (1.32)$$

式中 f^* 表示 f 的复共轭, Re 表示实数部分.

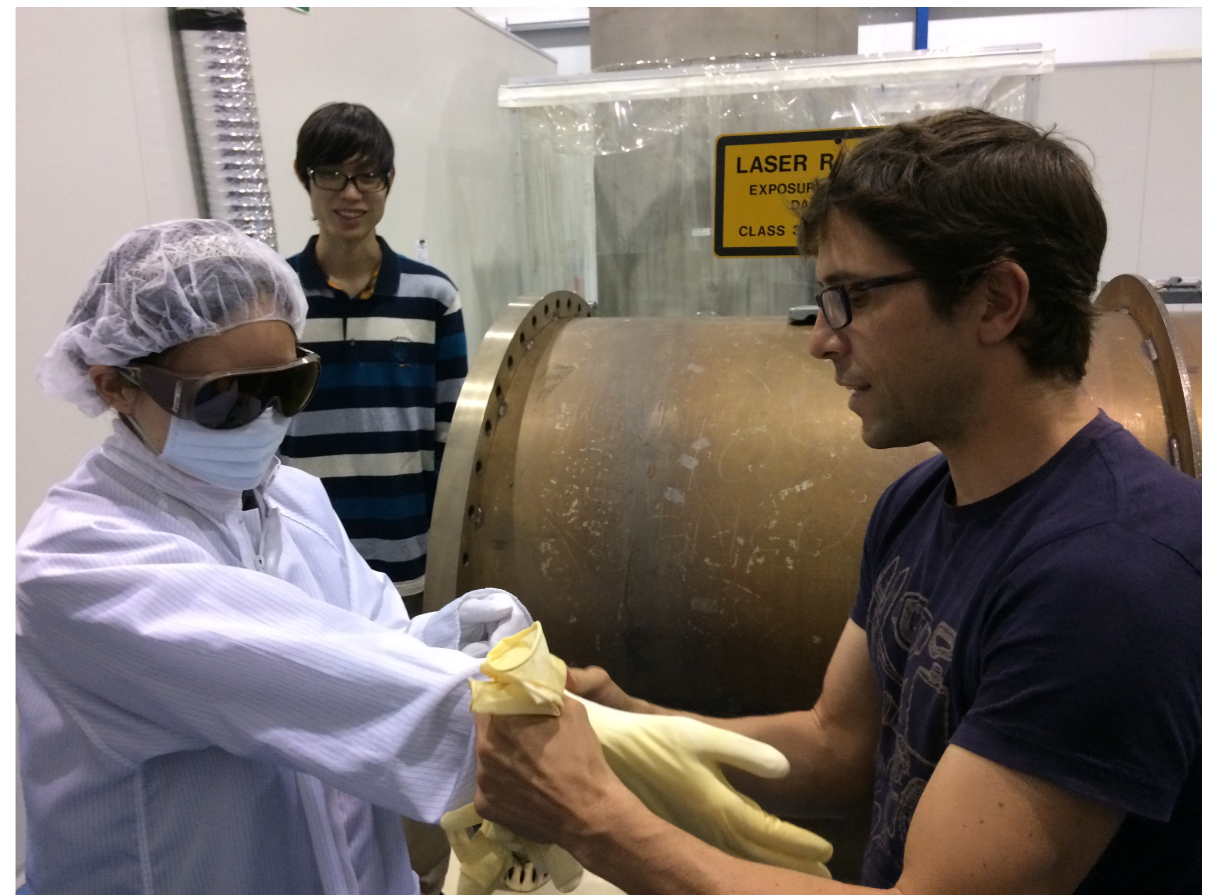
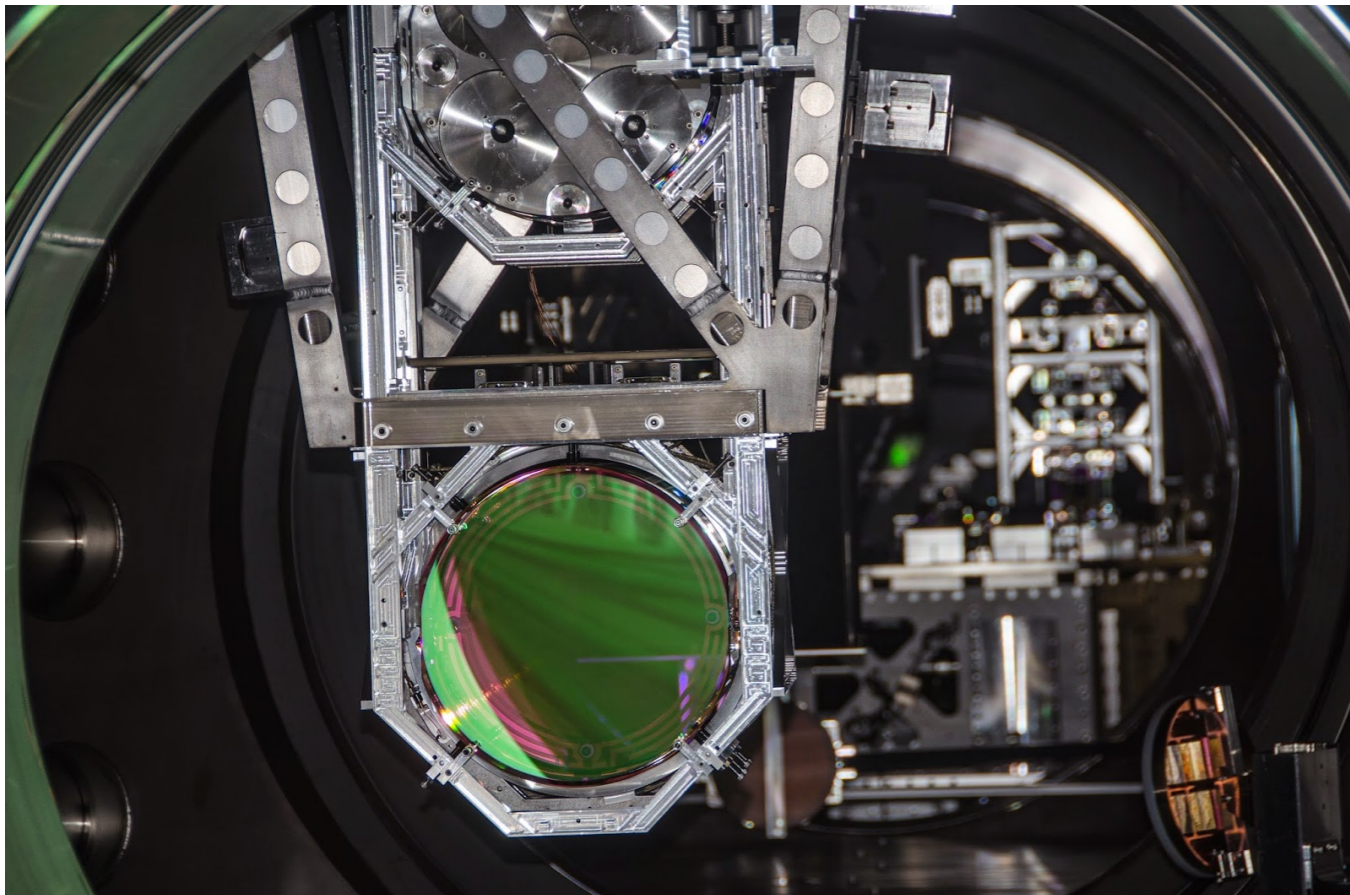
由此, 能量密度和能流密度的平均值为

$$\overline{w} = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 = \frac{1}{2\mu} B_0^2, \quad (1.33)$$

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \mathbf{n}. \quad (1.34)$$

4.2 电磁波在介质面上的 的反射与折射

e.g. (GW detection) laser interferometer



§ 2 电磁波在介质界面上的反射和折射

电磁波入射于介质界面时,发生反射和折射现象.关于反射和折射的规律包括两个方面:(1)入射角、反射角和折射角的关系;(2)入射波、反射波和折射波的振幅比和相对相位.

任何波动在两个不同界面上的反射和折射现象属于边值问

题,它是由波动的基本物理量在边界上的行为确定的,对电磁波来说,是由 E 和 B 的边值关系确定的.因此,研究电磁波反射折射问题的基础是电磁场在两个不同介质界面上的边值关系.下面我们应用电磁场边值关系来分析反射和折射的规律.

1. 反射和折射定律 第一章(5.11)式给出一般情况下电磁场的边值关系

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \boldsymbol{\alpha}, \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma, \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

式中 σ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 是面自由电荷、电流密度.这组边值关系是麦克斯韦方程组的积分形式应用到边界上的推论.在绝缘介质界面上, $\sigma = 0, \boldsymbol{\alpha} = 0$.上节我们证明了在一定频率情形下,麦氏方程组(1.2)不是完全独立的,由第一、二式可导出其他两式.与此相应,边值关系(2.1)式也不是完全独立的,由第一、二式可以导出其他两式.因此,在讨论时谐电磁波时,介质界面上的边值关系只需考虑以下两

(2.1)式也不是完全独立的,由第一、二式可以导出其他两式.因此,在讨论时谐电磁波时,介质界面上的边值关系只需考虑以下两式

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

虽然介质中 \mathbf{B} 是基本物理量,但由于 \mathbf{H} 直接和自由电流相关,而且边界条件也由 \mathbf{H} 表出,所以在研究电磁波传播问题时,往往用 \mathbf{H} 表示磁场较为方便.

设介质 1 和介质 2 的分界面为无穷大平面,且平面电磁波从介质 1 入射于界面上,在该处产生反射波和折射波.设反射波和折射波也是平面波(由下面所得结果可知这假定是正确的).设入射波、反射波和折射波的电场强度分别为 \mathbf{E} 、 \mathbf{E}' 和 \mathbf{E}'' ,波矢量分别为 \mathbf{k} 、 \mathbf{k}' 和 \mathbf{k}'' .它们的平面波表示式分别为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \\
 \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_0 e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \\
 \mathbf{E}'' &= \mathbf{E}''_0 e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x} - \omega t)}.
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

现在先求波矢量方向之间的关系. 应用边界条件(2.2)式时, 注意介质 1 中的总场强为入射波与反射波场强的叠加, 而介质 2 中只有折射波, 因此有边界条件

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E} + \mathbf{E}') = \mathbf{n} \times \mathbf{E}''.$$

把(2.3)式代入得

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \mathbf{E}'_0 e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}}) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}''_0 e^{i\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x}}.$$

此式必须对整个界面成立. 选界面为平面 $z=0$, 则上式应对 $z=0$ 和任意 x, y 成立. 因此三个指数因子必须在此平面上完全相等,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x}, \quad (z=0)$$

由于 x 和 y 是任意的, 它们的系数应各自相等,

$$k_x = k'_x = k''_x, \quad k_y = k'_y = k''_y.$$

↑
z

$$k_x = k'_x = k''_x, \quad k_y = k'_y = k''_y. \quad (2.4)$$

如图 4-3, 取入射波矢在 xz 平面上, 有 $k_y = 0$, 由上式 k'_y 和 k''_y 亦为零. 因此, 反射波矢和折射波矢都在同一平面上.

以 θ , θ' 和 θ'' 分别代表入射角, 反射角和折射角, 有

$$k_x = k \sin \theta, \quad k'_x = k' \sin \theta', \quad k''_x = k'' \sin \theta'. \quad (2.5)$$

设 v_1 和 v_2 为电磁波在两介质中的相速, 由(1.21)式有

$$k = k' = \frac{\omega}{v_1}, \quad k'' = \frac{\omega}{v_2} \quad (2.6)$$

把(2.5)和(2.6)式代入(2.4)式得

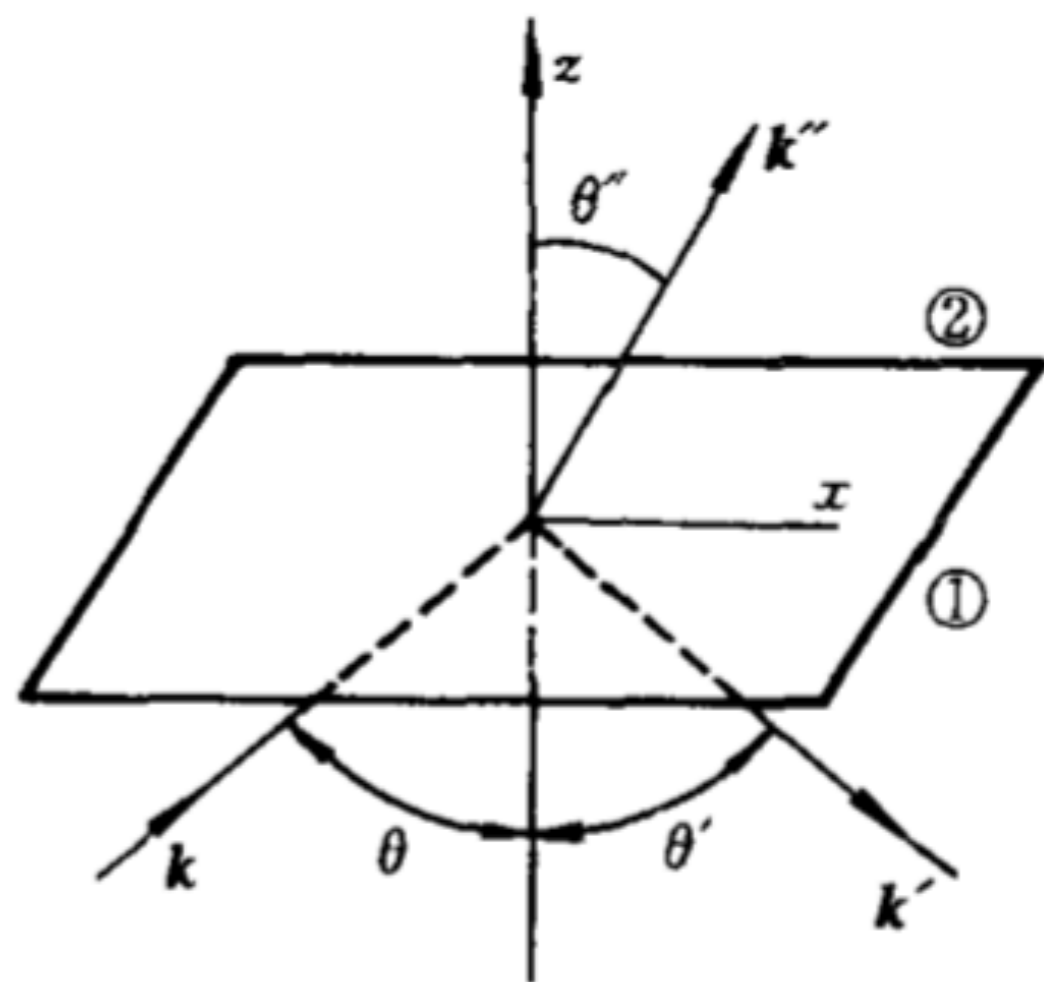


图 4-3

$$\theta = \theta', \quad \frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (2.7)$$

这就是我们熟知的反射和折射定律. 对电磁波来说, $v = 1 / \sqrt{\mu\epsilon}$, 因此

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{\sqrt{\mu_2\epsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\epsilon_1}} = n_{21}. \quad (2.8)$$

n_{21} 为介质 2 相对于介质 1 的折射率. 由于除铁磁质外, 一般介质都有 $\mu \approx \mu_0$, 因此通常可以认为 $\sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$ 就是两介质的相对折射率. 频率不同时, 折射率亦不同, 这是色散现象在折射问题中的表现.

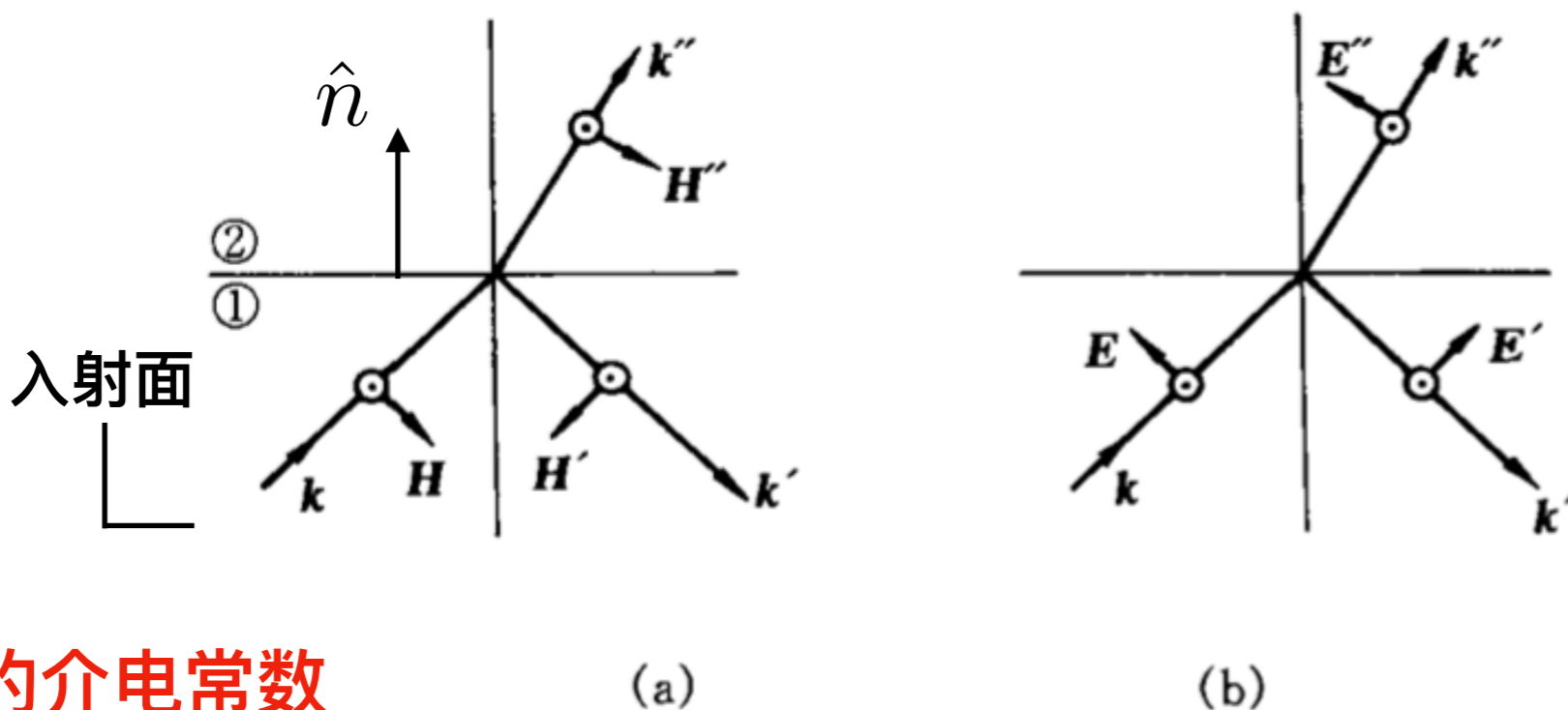
(推导, 作业)

2. 振幅关系 菲涅耳(Fresnel)公式 现在应用边值关系

(2.2)式求入射、反射和折射波的振幅关系. 由于对每一波矢 k 有两个独立的偏振波, 所以需要分别讨论 E 垂直于入射面和 E 平行于入射面两种情形.

(1) $E \perp$ 入射面[图 4-4(a)]. 边值关系(2.2)式为

$$E + E' = E'', \quad (2.9)$$



真空中的介电常数
最大还是最小? why?

图 4-4

$$H \cos \theta - H' \cos \theta' = H'' \cos \theta''. \quad (2.10)$$

由(1.28)式, $H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E$, 取 $\mu = \mu_0$, (2.10)式可写为

$$\sqrt{\epsilon_1} (E - E') \cos \theta = \sqrt{\epsilon_2} E'' \cos \theta'', \quad (2.11)$$

由(2.9)和(2.11)式, 并利用折射定律(2.8)式得

$$\frac{E'}{E} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta - \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta''}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta''} = -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')}, \quad (2.12)$$

$$\frac{E''}{E} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta''} = \frac{2\cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'')}.$$

(2) $E //$ 入射面 [图 3-4(b)]. 边值关系(2.2)式为

$$E \cos \theta - E' \cos \theta = E'' \cos \theta'', \quad (2.13)$$

$$H + H' = H''. \quad (2.14)$$

(2.14)式可用电场表示为

$$\sqrt{\epsilon_1}(E + E') = \sqrt{\epsilon_2}E''.$$

上式与(2.13)式联立, 并利用折射定律(2.8)式得

$$\frac{E'}{E} = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \theta'')}{\operatorname{tg}(\theta + \theta'')}, \quad (2.15)$$

$$\frac{E''}{E} = \frac{2\cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')}.$$

(2.12)和(2.15)式称为菲涅耳公式, 表示反射波、折射波与入射波场强的比值. 由这些公式看出, 垂直于入射面偏振的波与平行于入射面偏振的波的反射和折射行为不同. 如果入射波为自然光 (即两种偏振光的等量混合), 经过反射或折射后, 由于两个偏振分

(2.12)和(2.15)式称为菲涅耳公式,表示反射波、折射波与入射波场强的比值.由这些公式看出,垂直于入射面偏振的波与平行于入射面偏振的波的反射和折射行为不同.如果入射波为自然光(即两种偏振光的等量混合),经过反射或折射后,由于两个偏振分量的反射和折射波强度不同,因而反射波和折射波都变为部分偏振光.在 $\theta + \theta'' = 90^\circ$ 的特殊情形下,由(2.15)式, E 平行于入射面的分量没有反射波,因而反射光变为垂直于入射面偏振的完全偏振光.这是光学中的布儒斯特(Brewster)定律,这情形下的入射角为布儒斯特角.

菲涅耳公式同时也给出入射波、反射波和折射波的相位关系.在 $E \perp$ 入射面情形,由(2.12)式,因为当 $\epsilon_2 > \epsilon_1$ 时 $\theta > \theta''$,因此 E'/E 为负数,即反射波电场与入射波电场反相,这现象称为反射过程中的半波损失. ?

上面的推导结果与光学实验事实完全符合,进一步验证了光的电磁理论的正确性.

Photo Credit: TALEX



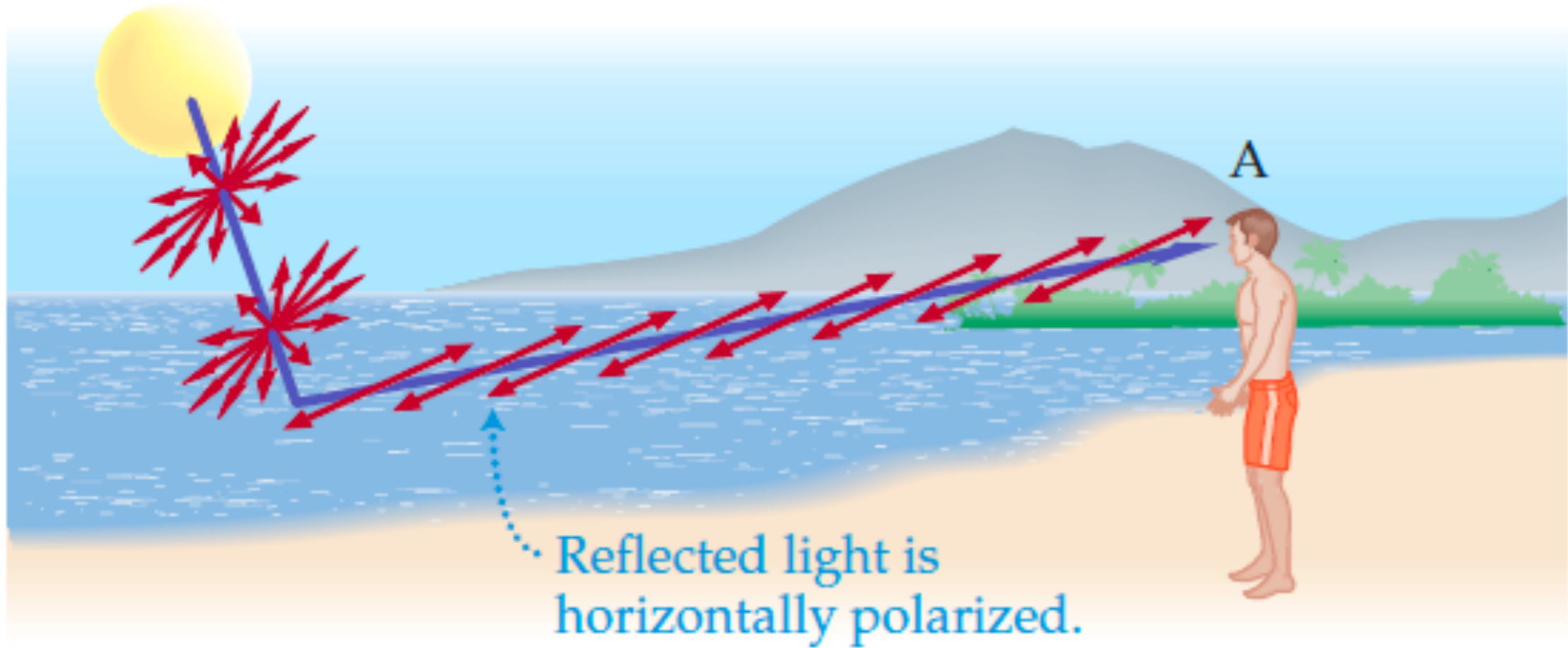
Photo Credit: TALEX



horizontally polarised

Photo Credit: TALEX





NORMAL LENSES

WITH **POLARIZED**
LENSES



Reduces
glare

3. 全反射 若 $\epsilon_1 > \epsilon_2$, 则 $n_{21} < 1$. 当电磁波从介质 1 入射时, 折射角 θ'' 大于入射角 θ . 当 $\sin\theta = n_{21} = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$ 时, θ'' 变为 90° , 这时折射波沿界面掠过. 若入射角再增大, 使 $\sin\theta > n_{21}$, 这时不能定义实数的折射角, 因而将出现不同于一般反射折射的物理现象. 现在我们研究这情况下的电磁波解.

假设在 $\sin\theta > n_{21}$ 情形下两介质中的电场形式上仍然用(2.3)式表示, 边值关系(2.4)式形式上仍然成立, 即仍有

$$\begin{aligned} k''_x &= k_x = k \sin\theta, \\ k'' &= k \frac{v_1}{v_2} = kn_{21}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

在 $\sin\theta > n_{21}$ 情形下有 $k''_x > k''$, 因而

$$k''_z = \sqrt{k''^2 - k''_x^2} = ik \sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}$$

变为虚数. 令

$$k''_z = i\kappa, \quad \kappa = k \sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2} \tag{2.17}$$

则折射波电场表示式变为 **dissipation!**

$$\underline{\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_0 e^{-\kappa z} e^{i(k''_x x - \omega t)}}. \tag{2.18}$$



$$\underline{E'' = E''_0 e^{-\kappa z} e^{i(k''_x x - \omega t)}}. \quad (2.18)$$

(2.18)式仍然是亥姆霍兹方程的解,因此代表在介质2中传播的一种可能波模.在上一节中我们不考虑这种波,是因为当 $z \rightarrow -\infty$ 时 $E'' \rightarrow \infty$,因而(2.18)式所表示的波不能在全空间中存在.但是这里所研究的折射波只存在于 $z > 0$ 的半空间中,因此(2.18)式是一种可能的解.

(2.18)式是沿 x 轴方向传播的电磁波,它的场强沿 z 轴方向指数衰减.因此,这种电磁波只存在于界面附近一薄层内,该层厚度 $\sim \kappa^{-1}$.由(2.17)式,

$$\kappa^{-1} = \frac{1}{k \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}} = \frac{\lambda_1}{2\pi \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}, \quad (2.19)$$

λ_1 为介质1中的波长.一般来说,透入第二介质中的薄层厚度与波长同数量级.

折射波磁场强度由(1.27)式求出. 考虑 E'' 垂直入射面情况 ($E'' = E''_y$),

$$H''_z = \sqrt{\frac{\epsilon_2 k''_x}{\mu_2 k''_z}} E''_y = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \sin\theta}{\mu_2 n_{21}}} E'', \quad (2.20)$$

$$H''_x = -\sqrt{\frac{\epsilon_2 k''_z}{\mu_2 k''_x}} E''_y = -i \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n_{21}^2} - 1} E''.$$

H''_z 与 E'' 同相, 但 H''_x 与 E'' 有 90° 相位差.

折射波平均能流密度由(1.34)式算出

$$\bar{S}''_x = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E''_y^* H''_z) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} |E''_0|^2 e^{-2\kappa z} \frac{\sin\theta}{n_{21}}, \quad (2.21)$$

$$\bar{S}''_z = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(E''_y^* H''_x) = 0.$$

由此, 折射波平均能流密度只有 x 分量, 沿 z 轴方向透入第二介质的平均能流密度为零.

本节推出的有关反射和折射的公式在 $\sin\theta > n_{21}$ 情形下形式上仍然成立. 只要作对应

由此, 折射波平均能流密度只有 x 分量, 沿 z 轴方向透入第二介质的平均能流密度为零.

本节推出的有关反射和折射的公式在 $\sin\theta > n_{21}$ 情形下形式上仍然成立. 只要作对应

$$\begin{aligned}\sin\theta'' &\rightarrow \frac{k''_x}{k''} = \frac{\sin\theta}{n_{21}}, \\ \cos\theta'' &\rightarrow \frac{k''_z}{k''} = i \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n_{21}^2} - 1},\end{aligned}\tag{2.22}$$

则由(2.12)和(2.15)式可以求出反射波和折射波的振幅和相位. 例如在 E 垂直入射面情形, 由(2.12)式得

$$\begin{aligned}\frac{E'}{E} &= \frac{\cos\theta - i \sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}{\cos\theta + i \sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}} = e^{-2i\phi}, \\ \text{tg}\phi &= \frac{\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}{\cos\theta}.\end{aligned}\tag{2.23}$$

此式表示反射波与入射波具有相同振幅, 但有一定的相位差. 反射波平均能流密度数值上和入射波平均能流密度相等, 因此电磁能

与之前矛盾么？

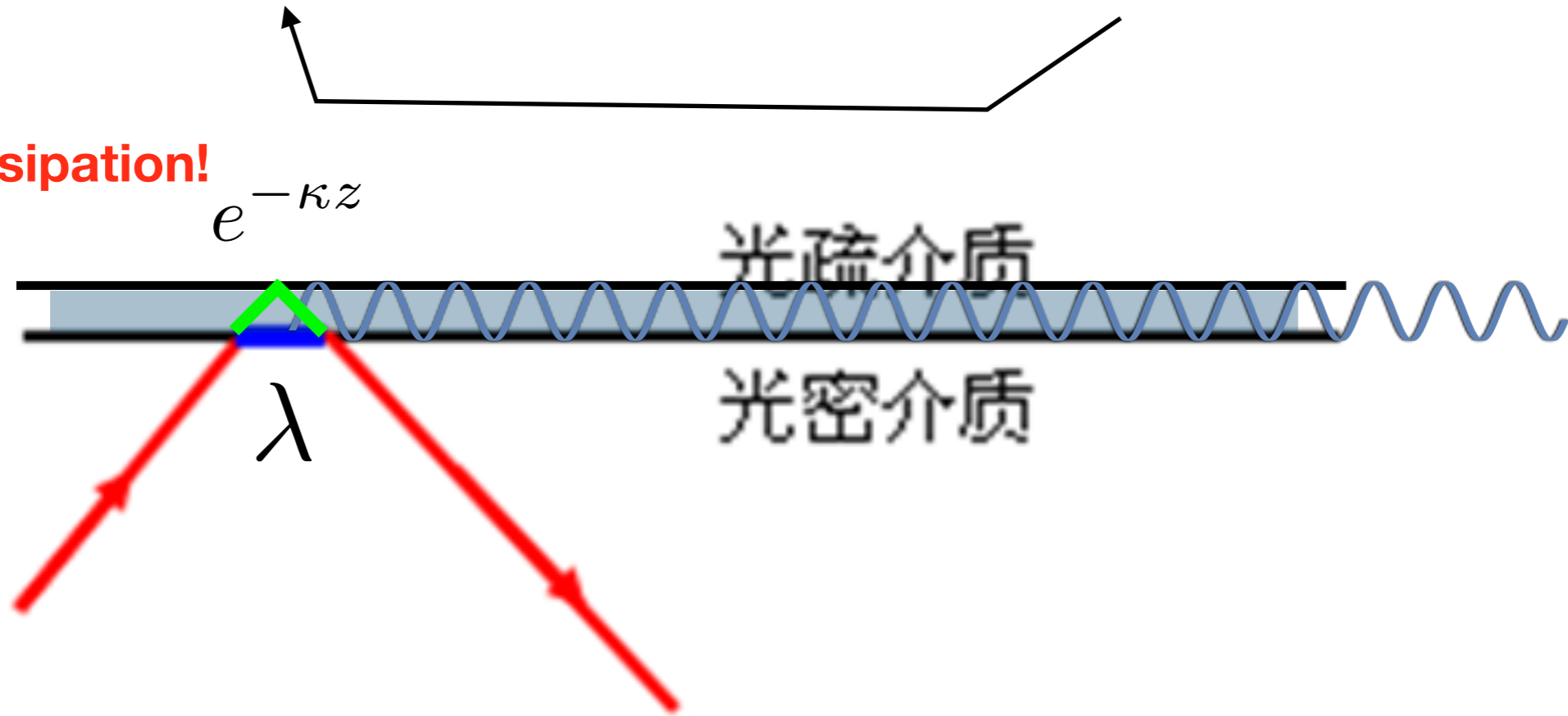
量被全部反射出去. 这现象称为全反射.

由(2.23)式, E' 和 E 振幅相等, 但相位不同, 因此反射波与入射波的瞬时能流值是不同的. (2.21)式所表示的也只是 S''_z 的平均值为零, 其瞬时值不为零. 由此可见, 在全反射过程中第二介质是起作用的. 在半周内, 电磁能量透入第二介质, 在界面附近薄层内储存起来, 在另一半周内, 该能量释放出来变为反射波能量.

加速电子

1. 能量全部反射；
2. 反射存在相移；
3. 透射场不为零；
4. 存在右行的表面波。

dissipation!



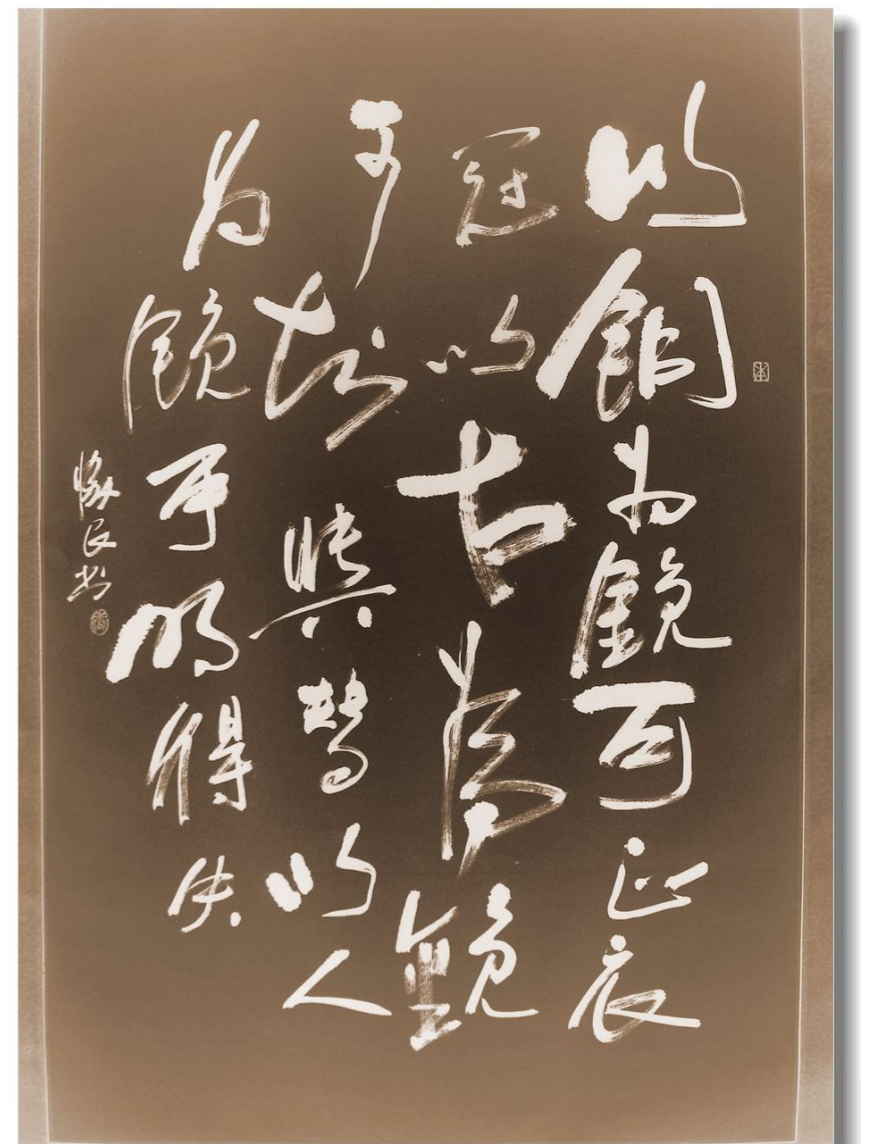
but we do not have friction! so have to be reflected!

$$\bar{S} \neq \bar{S}' + \bar{S}''$$

不代表能量不守恒，
这里存在double counting!

瞬时的能量是守恒的，只不过这里有一个能量存储又释放的过程（本课程不涉及！）

4.3 有导体存在时的电磁波的传播



第一节讨论了真空和绝缘介质中电磁波的传播问题。在真空和理想绝缘介质内部,没有能量损耗,电磁波可以无衰减地传播。

现在我们研究导体中的电磁波。导体内有自由电子,在电磁波电场作用下,自由电子运动形成传导电流,由电流产生的焦耳热使电磁波能量不断损耗。因此,在导体内部的电磁波是一种衰减波。在传播过程中,电磁能量转化为热量。

1. 导体内的自由电荷分布 在静电情形,我们知道导体内部不带电,自由电荷只能分布于导体表面上.在迅变场中是否仍然保持这特性呢?

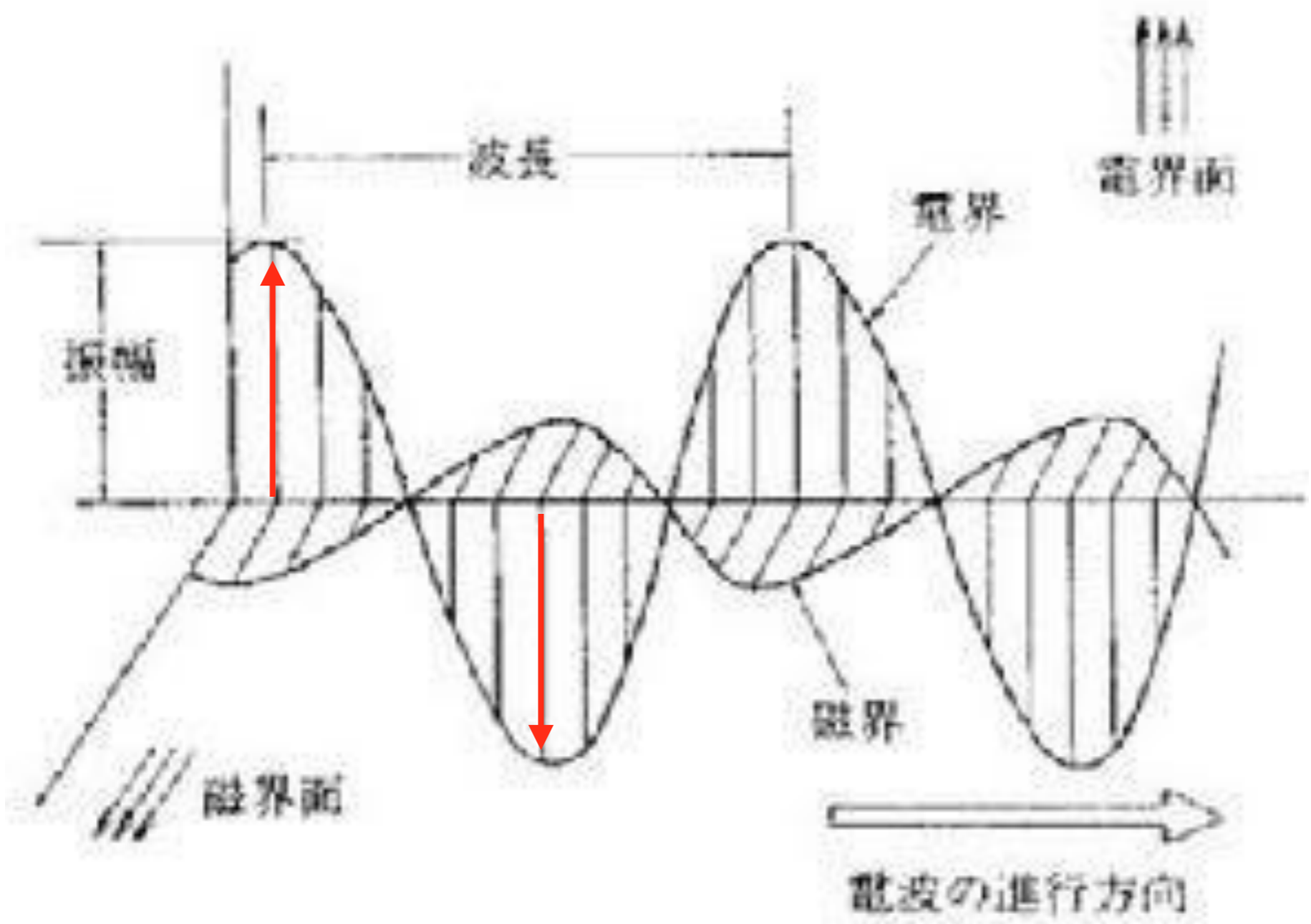
设导体内部某区域内有自由电荷分布,其密度为 ρ .这电荷分布激发电场 E ,

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho. \quad (3.1)$$

在电场 E 作用下,导体内引起传导电流 J .由欧姆定律,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3.2)$$

式中 σ 为电导率.代入(3.1)式得



電磁波

(否则, 下半个周期, 电场方向改变
自由电子运动方向改变)

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\sigma}{\epsilon} \rho. \quad (3.3)$$

上式表示当导体内某处有电荷密度 ρ 出现时, 就有电流从该处向外流出. 从物理上看这是很明显的. 因为假如某区域内有电荷积聚的话, 电荷之间相互排斥, 必然引起向外发散的电流. 由于电荷外流, 每一体元内的电荷密度减小. ρ 的变化率由电荷守恒定律确定

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho. \quad (3.4)$$

解此方程得

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t},$$

式中 ρ_0 为 $t=0$ 时的电荷密度. 由上式, 电荷密度随时间指数衰减, 衰减的特征时间 τ (ρ 值减小到 ρ_0/e 的时间) 为

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}. \quad (3.5)$$

因此, 只要电磁波的频率满足 $\omega \ll \tau^{-1} = \sigma/\epsilon$, 或 $T \gg \tau$.

$$\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \gg 1, \quad (3.6)$$

解此方程得

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t},$$

式中 ρ_0 为 $t=0$ 时的电荷密度. 由上式, 电荷密度随时间指数衰减, 衰减的特征时间 τ (ρ 值减小到 ρ_0/e 的时间) 为

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}. \quad (3.5)$$

因此, 只要电磁波的频率满足 $\omega \ll \tau^{-1} = \sigma/\epsilon$, 或 $T \gg \tau$.

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \gg 1, \quad (3.6)$$

就可以认为 $\rho(t) = 0$. (3.6) 式可以看作良导体条件. 对于一般金属导体, τ 的数量级为 10^{-17} s. 只要电磁波频率不太高, 一般金属导体都可以看作良导体. 良导体内部没有自由电荷分布, 电荷只能分布于导体表面上.

可见光对应的频率为 430—790 THz

导体内部自由电子可以在半个
周期内全部衰减完毕

2. 导体内的电磁波 导体内部 $\rho = 0, \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, 麦氏方程组为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

对一定频率 ω 的电磁波, 可令 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, 则有

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H}, \\
\nabla \times \mathbf{H} &= -i\omega\epsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E}, \\
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \\
\nabla \cdot \mathbf{H} &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.8}$$

把这组方程和绝缘介质的方程组(1.11)比较, 差别仅在于第二式右边多了一项 $\sigma\mathbf{E}$, 这项是由传导电流引起的. 如果形式上引入导体的“复电容率”

$$\epsilon' = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega},
\tag{3.9}$$

则(3.8)第二式可写为

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon'\mathbf{E},
\tag{3.10}$$

与绝缘介质中的相应方程形式上完全一致. 因此只要把绝缘介质中电磁波解所含的 ϵ 换作 ϵ' , 即得导体内的电磁波解.

我们先讨论复电容率的物理意义: 在(3.8)第二式中, 右边两项分别代表位移电流和传导电流. 传导电流与电场同相, 它的耗散功率密度为 $\frac{1}{2}\text{Re}(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2}\sigma E_0^2$. 位移电流与电场有 90° 相位差,

我们先讨论复电容率的物理意义:在(3.8)第二式中,右边两项分别代表位移电流和传导电流.传导电流与电场同相,它的耗散

功率密度为 $\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \sigma E_0^2$. 位移电流与电场有 90° 相位差,

它不消耗功率. 相应地,在(3.9)式所定义的复电容率中,实数部分 ϵ 代表位移电流的贡献,它不引起电磁波功率的耗散,而虚数部分是传导电流的贡献,它引起能量耗散^①.

在一定频率下,对应于绝缘介质内的亥姆霍兹方程(1.13),在导体内部有方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad (3.11)$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon'}. \quad (3.12)$$

(3.11)式的解当满足条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 时代表导体中可能存在的电磁波. 解出 \mathbf{E} 后,磁场 \mathbf{H} 可由(3.8)第一式求出.

方程(3.11)形式上也有平面波解

$$\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} = i \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} = i E^2$$

能量转移
给磁场

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (3.13)$$

但由(3.12)式, k 为复数, 因此 k 是一个复矢量, 即它的分量一般为复数. 设

$$\mathbf{k} = \boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\alpha}, \quad (3.14)$$

导体中电磁波的表示式为

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}} e^{i(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}. \quad (3.15)$$

由此式可见, 波矢量 k 的实部 β 描述波的传播的相位关系, 虚部 α

描述波幅的衰减。 β 称为相位常数, α 称为衰减常数。

由(3.12)式, 矢量 α 和 β 应满足一定关系. 把(3.14)和(3.9)式代入(3.12)式得

$$k^2 = \beta^2 - \alpha^2 + 2i\alpha \cdot \beta = \omega^2 \mu \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right), \quad (3.16)$$

比较式中的实部和虚部得

$$\begin{aligned} \beta^2 - \alpha^2 &= \omega^2 \mu \epsilon, \\ \alpha \cdot \beta &= \frac{1}{2} \omega \mu \sigma. \end{aligned} \quad (3.17)$$

矢量 α 和 β 的方向不常一致. 由边值关系和(3.17)式可以解出矢量 α 和 β . 例如当电磁波从空间入射到导体表面情形, 以 $k^{(0)}$ 表示空间中的波矢, k 表示导体内的波矢. 设入射面为 xz 面, z 轴为指向导体内部的法线. 由边值关系(2.4)式有

$$k_x^{(0)} = k_x = \beta_x + i\alpha_x. \quad (3.18)$$

空间中波矢 $k^{(0)}$ 为实数, 因此由上式得 $\alpha_x = 0, \beta_x = k_x$, 即矢量 α 垂直于金属表面, 但矢量 β 则有 x 分量. 由上式及(3.17)式就可以解出 α_z 和 β_z , 因而确定矢量 α 和 β .

$\vec{\alpha}$

只有z分量：什么物理意义？

3. 趋肤效应和穿透深度 由于有衰减因子,电磁波只能透入导体表面薄层内.因此,有导体存在时的电磁波传播问题一般是作为边值问题考虑的.电磁波主要是在导体以外的空间或介质中传播,在导体表面上,电磁波与导体中的自由电荷相互作用,引起导体表层上的电流.这电流的存在使电磁波向空间反射,一部分电磁

能量透入导体内,形成导体表面薄层内的电磁波,最后通过传导电流把这部分能量耗散为焦耳热。

为简单起见,我们只考虑垂直入射情形.设导体表面为 xy 平面, z 轴指向导体内部.在这情形下由(3.18)式, $\alpha_x = \beta_x = 0$, α 和 β 都沿 z 轴方向,(3.15)式变为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)}. \quad (3.19)$$

由(3.17)式可解出 α 和 β ,结果是

$$\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \left[\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} + 1 \right] \right]^{\frac{1}{2}},$$
$$\alpha = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \left[\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - 1 \right] \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.20)$$

对于良导体情形,这些公式还可以简化.由(3.16)式, k^2 的虚部与实部之比为 $\sigma / \epsilon\omega$,在良导体情形此值 $\gg 1$,因而 k^2 的实部可以忽略

以忽略

$$k^2 \approx i\omega\mu\sigma,$$

$$k \approx \sqrt{i\omega\mu\sigma} \approx \beta + i\alpha$$

由此得

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}. \quad (3.21)$$

how?

波幅降至原值 $1/e$ 的传播距离称为穿透深度 δ . 由上式及(3.19)式,

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}. \quad (3.22)$$

穿透深度与电导率及频率的平方根成反比. 例如对铜来说, $\sigma \sim 5 \times 10^7 \text{S} \cdot \text{m}^{-1}$, 当频率为 50Hz 时, $\delta \sim 0.9 \text{cm}$; 当频率为 100MHz 时, $\delta \sim 0.7 \times 10^{-3} \text{cm}$. 由此可见, 对于高频电磁波, 电磁场以及和它相作用的高频电流仅集中于表面很薄一层内, 这种现象称为趋肤效应.

由(3.8)第一式可求出磁场与电场的关系,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{1}{\omega\mu} (\beta + i\alpha) \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad (3.23)$$

式中 \mathbf{n} 为指向导体内部的法线. 在良导体情形, 由(3.21)式有

$$\mathbf{H} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{i\frac{\pi}{4}} \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad (3.24)$$

由上式, 磁场相位比电场相位滞后 45° , 而且

$$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left| \frac{\mathbf{H}}{\mathbf{E}} \right| = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \gg 1. \quad (3.25)$$

而在真空或绝缘介质情形, 此比值为 1 [见(1.28)式]. 因此, 在金属导体中, 相对于真空或绝缘介质来说, 磁场远比电场重要, 金属内电磁波的能量主要是磁场能量.

$$\left| \frac{B}{E} \right| = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \sqrt{\mu\epsilon}$$

4. 导体表面上的反射 和绝缘介质情形一样,应用边值关系可以分析导体表面上电磁波的反射和折射问题.在一般入射角下,由于导体内电磁波的特点使计算比较复杂.垂直入射情形计算较为简单,而且已经可以显示出导体反射的特点.因此这里只讨论垂直入射情形.

设电磁波由真空入射于导体表面,在界面上产生反射波和透入导体内的折射波.如图 4-4(a)应用到垂直入射情形,电磁场边值关系为

$$E + E' = E'', \quad H - H' = H''. \quad (3.26)$$

其中 E 、 E' 和 E'' 分别代表入射、反射和折射波的场强.在良导体情形,由(3.23)式和(1.29)式,可以把(3.26)第二式用电场表出(设 $\mu \approx \mu_0$),

$$E - E' = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \epsilon_0}} (1 + i) E'', \quad \text{推导}$$

此式与(3.26)第一式联立解出

$$\frac{E'}{E} = -\frac{1 + i - \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}}{1 + i + \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}} \quad (3.27)$$

反射系数 R 定义为反射能流与入射能流之比. 由上式得

$$R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2 = \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}\right)^2 + 1}{\left(1 + \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}\right)^2 + 1} \approx 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}} \quad (3.28)$$

由上式可见, 电导率愈高, 则反射系数愈接近于 1. 测量结果证实了上式的正确性. 例如对于波长为 $1.2 \times 10^{-5} \text{m}$ 的红外线, 测得铜在垂直入射时的反射系数为 $R = 1 - 0.016$, 与(3.28)式相符. 对于波长较长的微波或无线电波, 反射系数更接近于 1, 只有很小部分电磁能量透入导体内部而被吸收掉, 绝大部分能量被反射出去. 因此, 在微波或无线电波情形下, 往往可以把金属近似地看作理想导体, 其反射系数接近于 1.

玻璃镜子?



DOCTOR
STRANGE

TM & © 2022 MARVEL

作业

例 1 证明在良导体内,非垂直入射情形有

$$\alpha_z \approx \beta_z \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}, \quad \beta_x \ll \beta_z.$$

解 设空间中入射波矢为 $k^{(0)}$, 由边值关系(3.18)式得

$$\alpha_x = 0, \quad \beta_x = k_x^{(0)}, \quad (3.29)$$

由(3.16)式,良导体内波数平方为

$$k^2 \approx i\omega\mu\sigma = \beta^2 - \alpha^2 + 2i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta},$$

因而

$$\beta^2 - \alpha^2 \approx 0, \quad (3.30)$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \alpha_z \beta_z = \frac{1}{2} \omega\mu\sigma = \frac{1}{2} \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \gg \frac{1}{2} k^{(0)2} \quad (3.31)$$

($\mu \approx \mu_0, \epsilon$ 与 ϵ_0 同级). 由(3.29)式和上式得

$$\alpha_z \beta_z \gg \beta_x^2.$$

略去 β_x^2 , 解(3.30)和(3.31)式得

$$\alpha_z \approx \beta_z \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}, \quad \beta_x \ll \beta_z. \quad (3.32)$$

因此,在任意入射角情形下, $\boldsymbol{\alpha}$ 垂直于表面, $\boldsymbol{\beta}$ 亦接近法线方向. 穿透深度 δ 仍由(3.22)式给出.

谐振腔：中空的金属腔

4.4 谐振腔

有界空间中的电磁波

2. 理想导体边界条件 实际导体虽然不是理想导体,但是象银或铜等金属导体,对无线电波来说,透入其内而损耗的电磁能量一般很小,接近于理想导体.因此,分析实际问题时,在第一级近似下,可以先把金属看作理想导体,把问题解出来,然后在第二级近似下,再考虑有限电导率引起的损耗.

在第二节中我们阐明在一定频率的电磁波情形,两不同介质(包括导体)界面上的边值关系可以归结为

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \boldsymbol{\alpha}. \quad (4.2)$$

式中 \mathbf{n} 为由介质 1 指向介质 2 的法线.这两关系满足后,另外两个关于法向分量的关系

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (4.4)$$

自然能够满足.

下面讨论导体表面边界条件.取角标 1 代表理想导体,角标 2

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (4.4)$$

自然能够满足。

下面讨论导体表面边界条件。取角标 1 代表理想导体，角标 2 代表真空或绝缘介质。取法线由导体指向介质中。在理想导体情况下，导体内部没有电磁场（对实际导体来说，应为导体内部足够深处，例如离表面几个穿透深度处，该处实际上已没有电磁场），因此， $\mathbf{E}_1 = \mathbf{H}_1 = 0$ 。略去角标 2，以 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 表示介质一侧处的场强，有边界条件

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad (4.5)$$

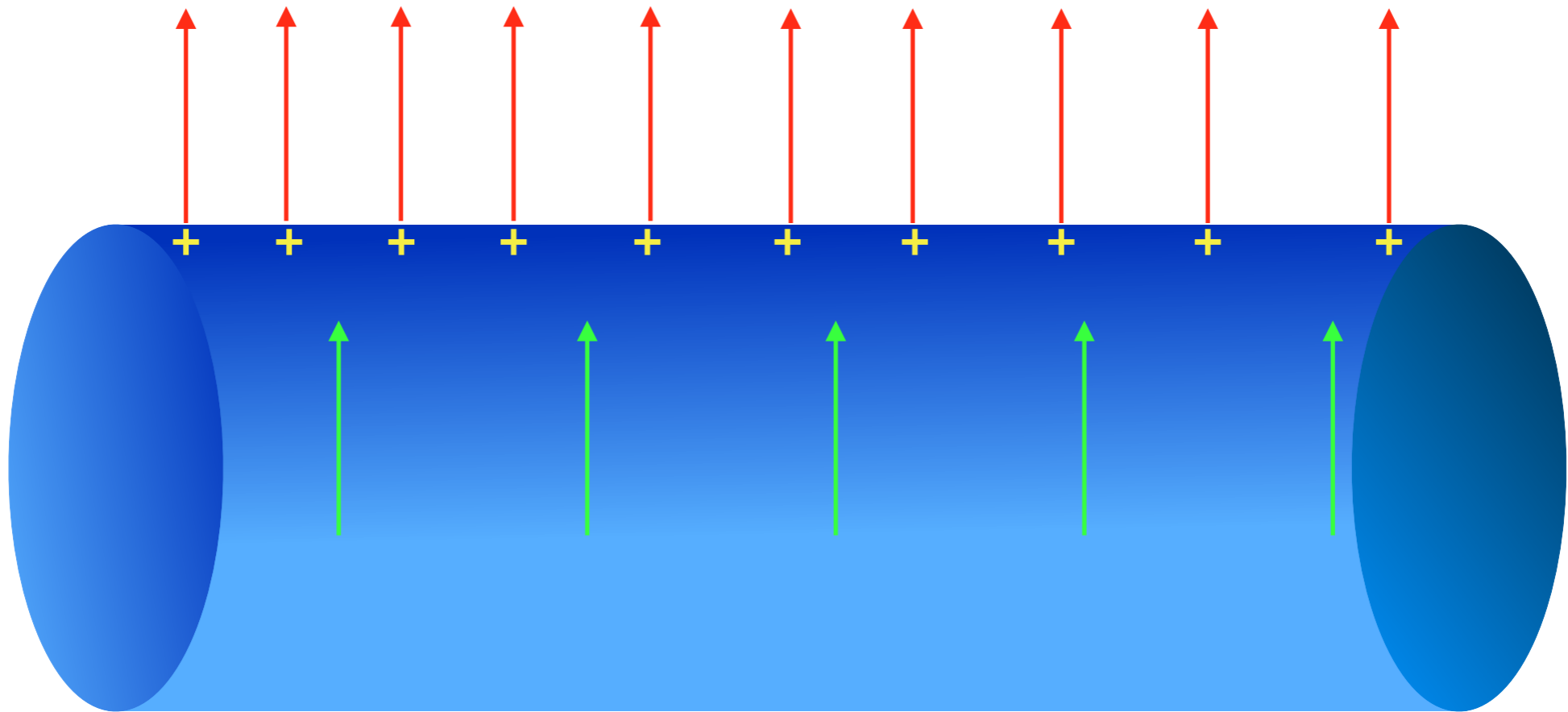
$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\alpha}. \quad (4.6)$$

这两条件满足后，另两条件

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \sigma, \quad (4.7)$$

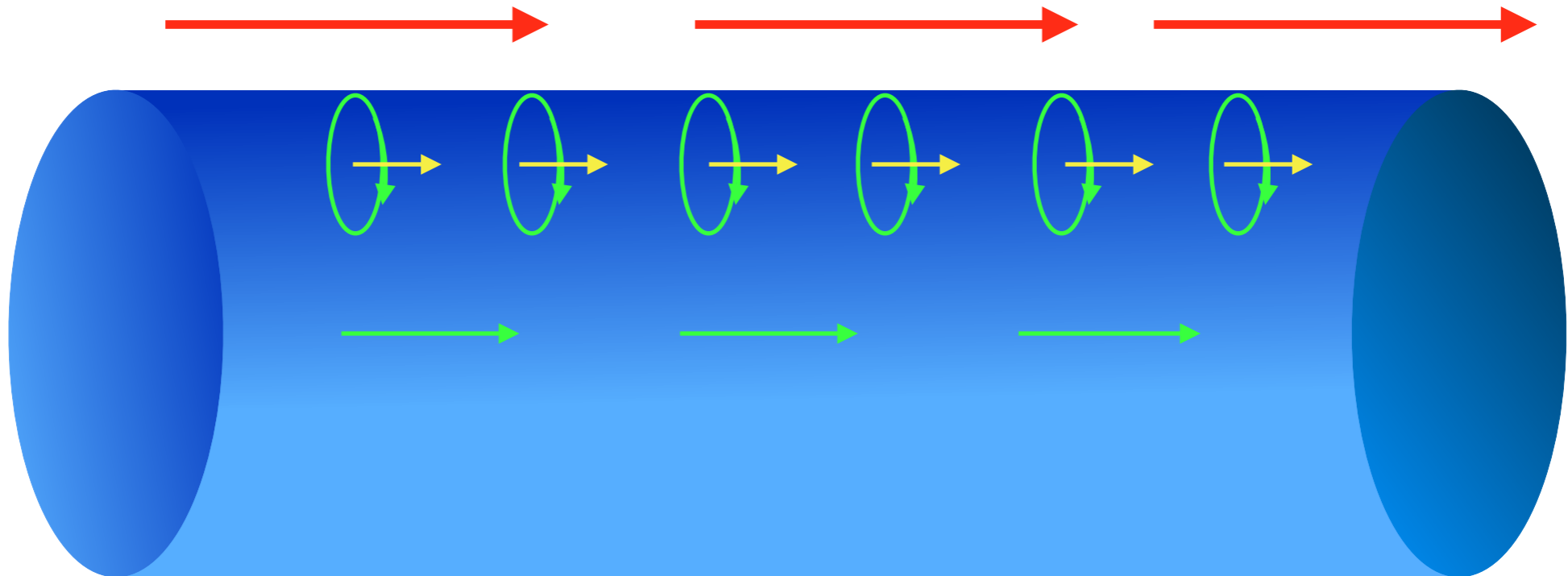
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.8)$$

自然满足。因此，解导体边值问题时，只需加上条件(4.5)和(4.6)



$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}$$



$$\vec{m} = i \cdot \vec{s}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{m}$$

式. 条件(4.6)式反映介质中电磁波的磁场强度与导体表面上高频电流的相互关系. 解出介质中电磁波后, 由此式可得导体表面电流分布形式. 因此, 真正制约着电磁波存在形式的是(4.5)式. 亥姆霍兹方程的解加上条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, 再加上边界条件(4.5)和(4.6)式后, 就得到该边值问题的解, 即该问题中可能存在的电磁波模.

理想导体界面边界条件可以形象地表述为, 在导体表面上, 电场线与界面正交, 磁感应线与界面相切. 我们可以应用这个规则来分析边值问题中的电磁波图象.

实际求解时, 先看方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 对边界电场的限制往往是方便的. 在边界面上, 若取 x, y 轴在切面上, z 轴沿法线方向, 由于该处 $E_x = E_y = 0$, 因此方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 在靠近边界上为 $\partial E_z / \partial z = 0$, 即

$$\frac{\partial E_n}{\partial n} = 0. \quad (4.9)$$

例 证明两平行无穷大导体平面之间可以传播一种偏振的

例 证明两平行无穷大导体平面之间可以传播一种偏振的 TEM 电磁波.

解 如图 4-6, 设两导体板与 y 轴垂直. 边界条件为在两导体平面上,

$$E_x = E_z = 0, \quad H_y = 0.$$

若沿 z 轴传播的平面电磁波的电场沿 y 轴方向偏振, 则此平面波满足导体板上的边界条件, 因此可以在导体板之间传播. 另一种偏振的平面电磁波 (E 与导体面相切) 不满足边界条件, 因而不能在导体面间存在. 所以在两导体板之间只能传播一种偏振的 TEM 平面波.

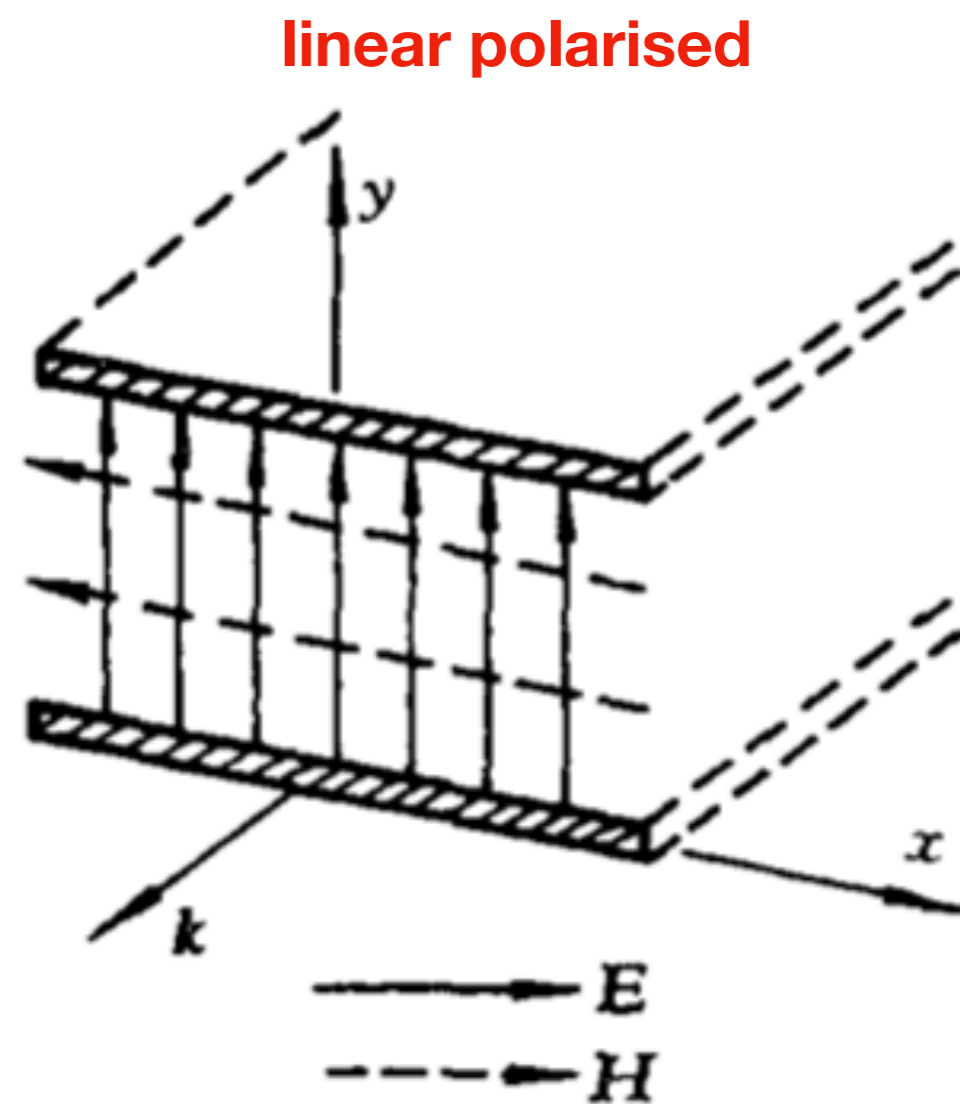


图 4-6

作业

下面我们分析矩形谐振腔内的电磁振荡. 如图 4-7, 取金属壁的内表面分别为 $x=0$ 和 L_1 , $y=0$ 和 L_2 , $z=0$ 和 L_3 面. 腔内电磁波的电场和磁场任一直角分量都满足亥姆霍兹方程. 设 $u(x, y, z)$ 为 E 或 H 的任一直角分量, 有

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0. \quad (4.10)$$

用分离变量法, 令

$$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z), \quad (4.11)$$

(4.10)式分解为三个方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X &= 0, \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y &= 0, \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon. \quad (4.13)$$

由(4.12)式的解得 $u(x, y, z)$ 的驻波解

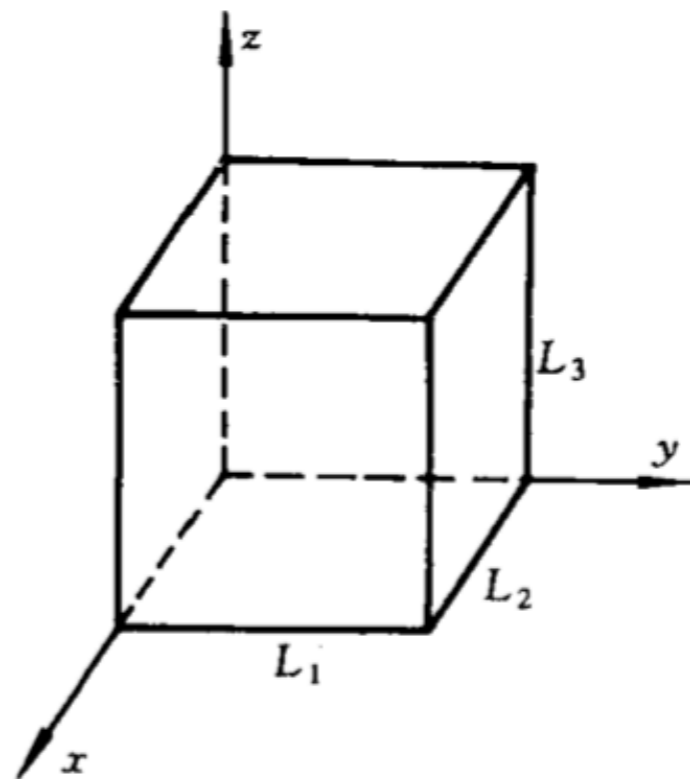


图 4-7

$$u(x, y, z) = (C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x)(C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y) \cdot (C_3 \cos k_z z + D_3 \sin k_z z). \quad (4.14)$$

式中 C_i, D_i 为任意常数. 把 $u(x, y, z)$ 具体化为 E 的各分量时, 考虑边界条件(4.5)和(4.9)式可得对这些常数的一些限制.

例如考虑 E_x , 它对 $x=0$ 壁面来说是法向分量, 由(4.9)式, 当 $x=0$ 时 $\partial E_x / \partial x = 0$, 因此在(4.14)式中不取 $\sim \sin k_x x$ 项. E_x 对 $y=0$ 和 $z=0$ 面来说是切向分量, 由(4.5)式, 当 $y=0$ 和 $z=0$ 时 $E_x = 0$, 因此在(4.14)式中不取 $\sim \cos k_y y$ 和 $\sim \cos k_z z$ 项. 对 E_y 和 E_z 亦可作类似考虑. 由此可得

$$\left. \begin{aligned} E_x &= A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z, \\ E_y &= A_2 \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z, \\ E_z &= A_3 \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

再考虑 $x=L_1, y=L_2, z=L_3$ 面上的边界条件, 得 $k_x L_1, k_y L_2$ 和 $k_z L_3$ 必须为 π 的整数倍, 即

$$k_x = \frac{m\pi}{L_1}, \quad k_y = \frac{n\pi}{L_2}, \quad k_z = \frac{p\pi}{L_3}, \quad (4.16)$$

$$k_x = \frac{m\pi}{L_1}, \quad k_y = \frac{n\pi}{L_2}, \quad k_z = \frac{p\pi}{L_3}, \quad (4.16)$$

$$m, n, p = 0, 1, 2, \dots$$

m, n, p 分别代表沿矩形三边所含的半波数目。

(4.15)式含三个任意常数 A_1, A_2 和 A_3 . 由方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, 它们之间应满足关系

$$k_x A_1 + k_y A_2 + k_z A_3 = 0. \quad (4.17)$$

因此 A_1, A_2 和 A_3 中只有两个是独立的。

当满足关系(4.16)和(4.17)式时, (4.15)式代表腔内的一种谐振波模, 或称为腔内电磁场的一种本征振荡. 对每一组 (m, n, p) 值, 有两个独立偏振波模. 谐振频率由(4.13)和(4.16)式给出,

$$\omega_{mnp} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{p}{L_3}\right)^2}. \quad (4.18)$$

ω_{mnp} 称为谐振腔的本征频率. 由(4.15)和(4.17)式, 若 m, n, p 中

由(4.12)式的解得 $u(x, y, z)$ 的驻波解

有两个为零, 则场强 $E=0$. 若 $L_1 \geq L_2 \geq L_3$, 则最低频率的谐振波模为(1,1,0), 其谐振频率为

$$f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}},$$

相应的电磁波波长为

$$\lambda_{110} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}}}.$$

此波长与谐振腔的线度同一数量级. 在微波技术中通常用谐振腔的最低波模来产生特定频率的电磁振荡. 在更高频率情况下也用到谐振腔的一些较高波模.

由于腔壁损耗以及需要维持一定的输出功率, 必须从外界供给能量来维持腔内的电磁振荡. 一般是用腔内电子束与电磁场相互作用把直流电源的能量转变为腔内高频电磁振荡的能量. 这个问题已超出本课程的范围, 这里不予详细讨论.

plot?

4.5 波导



1. 高频电磁能量的传输 近代无线电技术如雷达、电视和定向通讯等都广泛地利用到高频电磁波,因此,需要研究高频电磁能量的传输问题.高频电磁能量的传输与低频相比有显著不同的特点.由第一章 § 6 的讨论我们知道,在所有情况下,包括恒定电流情况下,能量都是在场中传播的.但是在低频情况下,由于场与线路中电荷和电流的关系比较简单,因而场在线路中的作用往往可以通过线路的一些参数(电压、电流、电阻、电容和电感等)表示出来.在这情况下,我们可以用电路方程解决实际问题,而不必直接研究场的分布.在高频情况下,场的波动性显著,集中的电容、电感等概念已不能适用,而且整个线路上的电流不再是一个与位置 x 无关的量,而是和电磁场相应地具有波动性质,此外,电压的概念

类似于LIGO GW

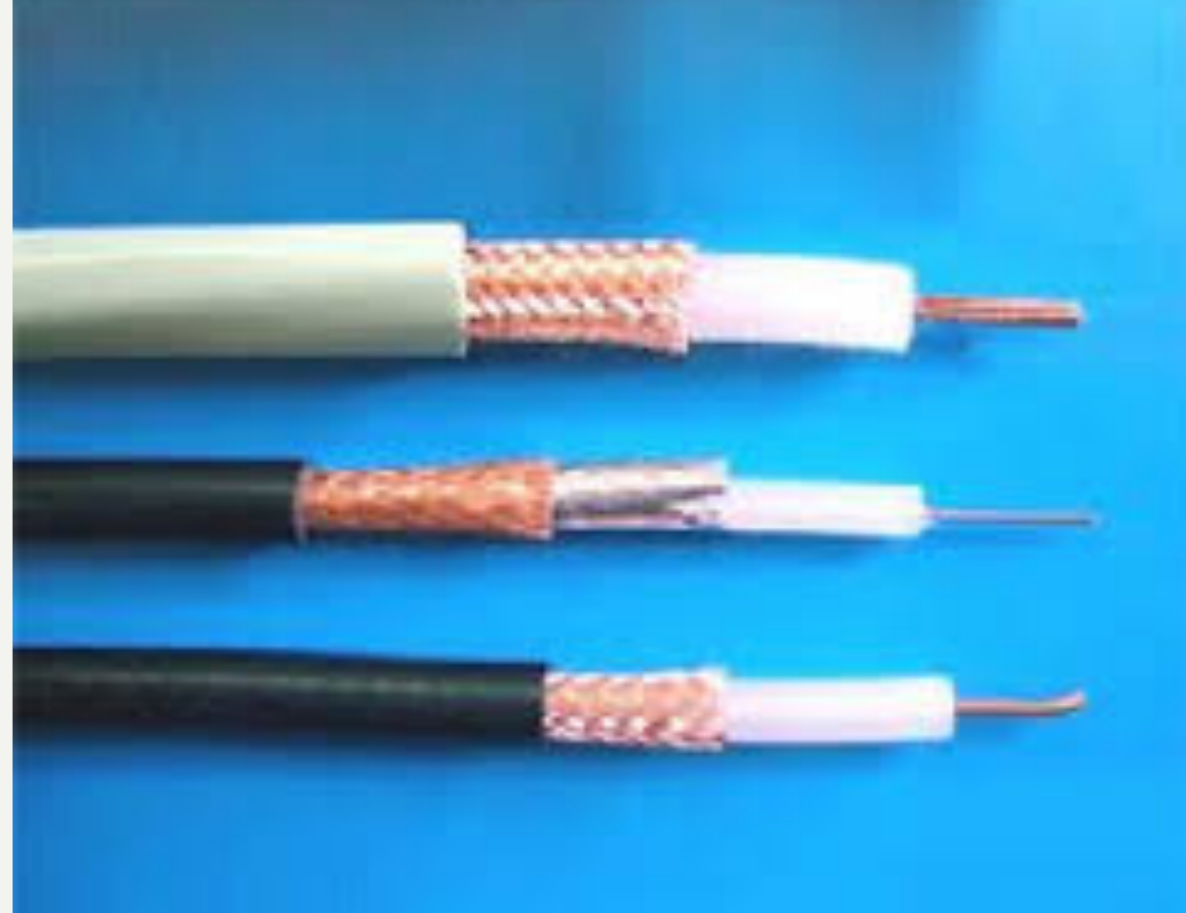
亦失去确切的意义。因此,在高频情况下,电路方程逐渐失效,我们必须直接研究和线路上的电荷电流的相互作用,解出电磁场,然后才能解决电磁能量传输问题。

低频电力系统常用双线传输。频率变高时,为了避免电磁波向外辐射的损耗和避免周围环境的干扰,可以改用同轴传输线。同轴传输线由空心导体管及芯线组成,电磁波在两导体之间的介质中传播。当频率更高时,内导线的焦耳损耗以及介质中的热损耗变得严重,这时需用波导代替同轴传输线。波导是一根空心金属管,截面通常为矩形或圆形。波导传输适用于微波范围。

类比: 热力学 V.S. 统计力学



双绞线 频率小于25MHz



同轴电缆





铁路信号的波导管

2. 矩形波导中的电磁波 现

现在我们求矩形波导内的电磁波解。选一直角坐标系,如图 4-8,取波导内壁面为 $x=0$ 和 a , $y=0$ 和 b ; z 轴沿传播方向。在一定频率下,管内电磁波是亥姆霍兹方程

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} &= 0, \\ k &= \omega \sqrt{\mu\epsilon},\end{aligned}\quad (5.1)$$

满足条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 的解。此解在管壁上还需满足边界条件(4.5)式,即电场在管壁上的切向分量为零。

由于电磁波沿 z 轴方向传播,它应有传播因子 $e^{ik_z z - i\omega t}$ 。因此,我们把电场 \mathbf{E} 取为

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y) e^{ik_z z} \quad (5.2)$$

代入(5.1)式得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \mathbf{E}(x, y) + (k^2 - k_z^2) \mathbf{E}(x, y) = 0. \quad (5.3)$$

用直角坐标分离变量,设 $u(x, y)$ 为电磁场的任一直角分量,它满

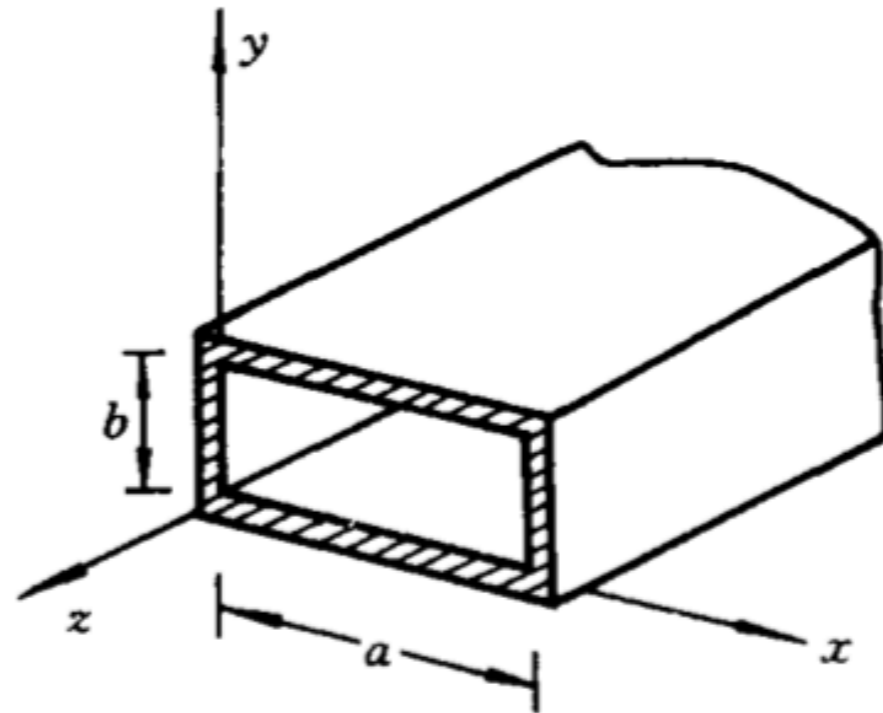


图 4-8

用直角坐标分离变量, 设 $u(x, y)$ 为电磁场的任一直角分量, 它满足方程(5.3). 设

$$\underline{u(x, y) = X(x) Y(y),} \quad (5.4)$$

(5.3)式可分解为两个方程

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0,$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2. \quad (5.6)$$

解(5.5)式,得 $u(x, y)$ 的特解

$$u(x, y) = (C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x)(C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y). \quad (5.7)$$

C_1, D_1, C_2 和 D_2 是任意常数. 当 $u(x, y)$ 具体表示 E 的某特定分量时, 考虑边界条件(4.5)和(4.9)式还可以得到对这些常数的一些限制条件.

边界条件是

$$E_y = E_z = 0, \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad (x=0, a) \quad (5.8)$$

$$E_x = E_z = 0, \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0. \quad (y=0, b)$$

由 $x=0$ 和 $y=0$ 面上的边界条件可得

$$\left. \begin{aligned} E_x &= A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z}, \\ E_y &= A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z}, \\ E_z &= A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{ik_z z}. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

再考虑 $x=a$ 和 $y=b$ 面上的边界条件, 得 $k_x a$ 和 $k_y b$ 必须为 π 的整数倍, 即

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

m 和 n 分别代表沿矩形两边的半波数目.

对解(5.9)式还必需加上条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. 由此条件得

$$k_x A_1 + k_y A_2 - ik_z A_3 = 0. \quad (5.11)$$

因此, 在 A_1, A_2 和 A_3 中只有两个是独立的. 对于每一 (m, n) 值,

(A_1, A_2, A_3 是复数, what is it meaning?)

纵波分量?

(x, y) 面上, 电场非均匀分布, 所以有 (k_x, k_y) ;

由 $x=0$ 和 $y=0$ 面上的边界条件可得

$$\left. \begin{aligned} E_x &= A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z}, \\ E_y &= A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z}, \\ E_z &= A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{ik_z z}. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

再考虑 $x=a$ 和 $y=b$ 面上的边界条件, 得 $k_x a$ 和 $k_y b$ 必须为 π 的整数倍, 即

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

m 和 n 分别代表沿矩形两边的半波数目.

对解(5.9)式还必需加上条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. 由此条件得

$$k_x A_1 + k_y A_2 - ik_z A_3 = 0. \quad (5.11)$$

因此, 在 A_1, A_2 和 A_3 中只有两个是独立的. 对于每一 (m, n) 值,

(A_1, A_2, A_3 是复数)

实际上光子是不会有纵波的, 波导中的电磁波是合成的, z 不是真正的传播方向, 由于 x, y 方向形成了驻波, 你才看到了合成出纵波的效果。

有两种独立波模.

E 的解得出后, 磁场 H 由(1.15)式给出

$$\mathbf{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}. \quad (5.12)$$

由(5.11)式, 对一定的 (m, n) , 如果选一种波模具有 $E_z = 0$, 则该波模的 $A_1/A_2 = -k_y/k_x$ 就完全确定, 因而另一种波模必须有 $E_z \neq 0$. 由(5.12)式可以看出, 对 $E_z = 0$ 的波模, $H_z \neq 0$. 因此, 在波导内传播的波有如下特点: 电场 E 和磁场 H 不能同时为横波. 通常选一种波模为 $E_z = 0$ 的波, 称横电波 (TE), 另一种波模为 $H_z = 0$ 的波, 称横磁波 (TM). TE 波和 TM 波又按 (m, n) 值的不同而分为 TE_{mn} 和 TM_{mn} 波. 一般情形下, 在波导中可以存在这些波的叠加.

3. 截止频率 在(5.6)式中, k 为介质内的波数, 它由激发频率 ω 确定; k_x 和 k_y 由(5.10)式确定, 它们决定于管截面的几何尺寸以及波模的 (m, n) 数. 若激发频率降低到 $k < \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, 则 k_z 变为虚数, 这时传播因子 $e^{ik_z z}$ 变为衰减因子. 在这情形下, 电磁场不再是沿波导传播的波, 而是沿 z 轴方向振幅不断衰减的电磁振荡. 能够在波导内传播的波的最低频率 ω_c 称为该波模的截止频率. 由(5.6)和(5.10)式, (m, n) 型的截止角频率为

$$\omega_{c, mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (5.13)$$

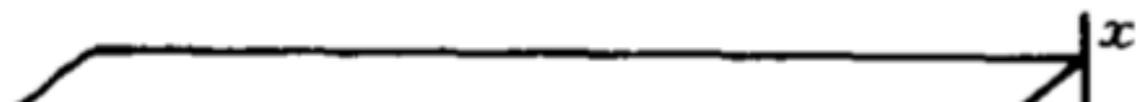
若 $a > b$, 则 TE_{10} 波有最低截止频率

$$\frac{1}{2\pi} \omega_{c, 10} = \frac{1}{2a \sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (5.14)$$

若管内为真空, 此最低截止频率为 $c/2a$, 相应的截止波长为

$$\lambda_{c, 10} = 2a. \quad (5.15)$$

因此, 在波导内能够通过的最大波长为 $2a$. 由于波导的几何尺寸不能做得过大, 用波导来传输较长的无线电波是不实际的. 在厘米波段, 波导的应用最广.



实际应用中,最常用的波模是 TE_{10} 波,它具有最低的截止频率,而其他高次波模的截止频率都比较高.因此,在某一频率范围,我们总可以选择适当尺寸的波导使其中只通过 TE_{10} 波.

4. TE_{10} 波的电磁场和管壁电流 当 $m=1, n=0$ 时, $k_x = \pi/a, k_y = 0$. 对 TE 波有 $E_z = 0$, 因而 $A_3 = 0$. 由 (5.11) 式得 $A_1 = 0$. 把常数 A_2 写为

$$A_2 = \frac{i\omega\mu a}{\pi} H_0,$$

由 (5.9) 和 (5.12) 式得 TE_{10} 波的电磁场

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi x}{a},$$

作业

$$E_y = \frac{i\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a},$$

(5.16)

$$H_x = -\frac{ik_z a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a},$$

$$E_x = E_z = H_y = 0.$$

式中只有一个待定常数 H_0 , 它是波导内 TE_{10} 波的 H_z 振幅, 其值由激发功率确定.

$$H_x = -\frac{ik_z a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a},$$

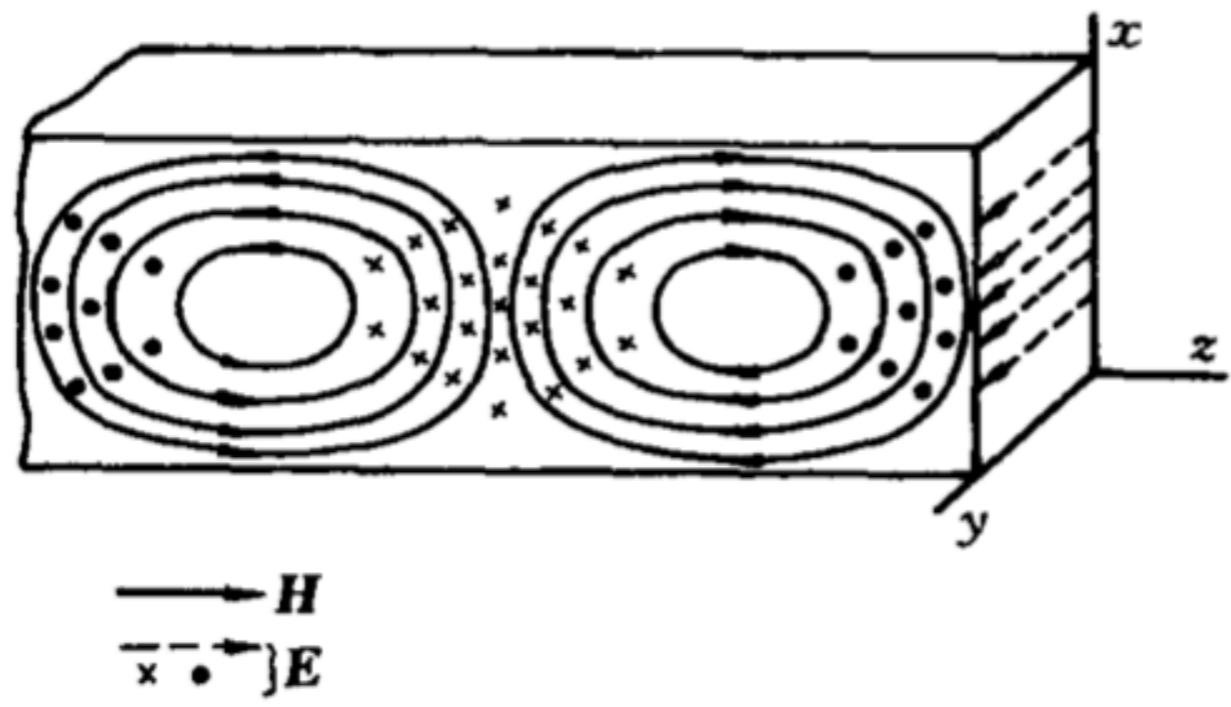
$$E_x = E_z = H_y = 0.$$

式中只有一个待定常数 H_0 , 它是波导内 TE_{10} 波的 H_z 振幅, 其值由激发功率确定.

TE_{10} 波的电磁场如图 4-9 所示. 求出磁场后, 由边界条件

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\alpha} \quad (5.17)$$

可得出管壁上电流分布. 由上式, 管壁上电流和边界上的磁感线正交. TE_{10} 波的管壁电流分布如图 4-10 所示. 由图看出, 在 TE_{10} 波情形, 波导窄边上没有纵向电流, 电流是横过窄边的. 因此在波导窄边上任何纵向裂缝都对 TE_{10} 波的传播有较大的扰动, 并导致由裂缝向外辐射电磁波, 但横向裂缝却不会影响电磁波在管内的传播. 由图还可看出, 在波导宽边中线上, 横向电流为零. 因此, 开在波导宽边中部的纵向裂缝不会影响 TE_{10} 波的传播, 这种裂缝广泛地应用于用探针测量波导内物理量的技术中.



纵向: z轴
 横向: x轴
 图 4-9
 窄边

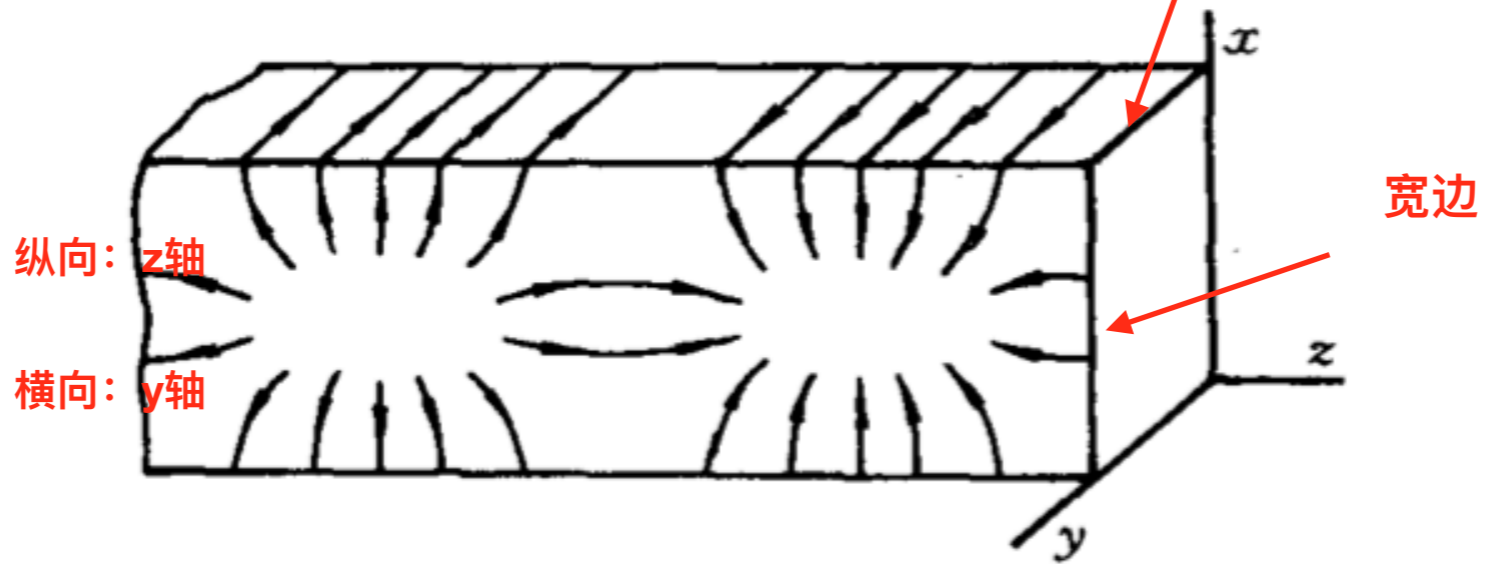
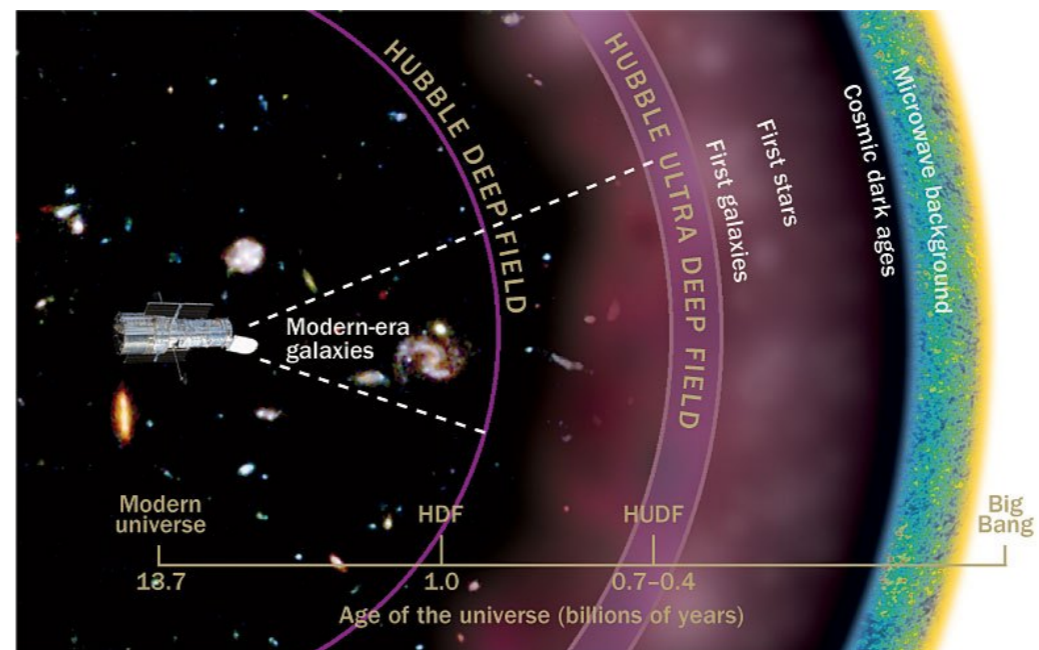
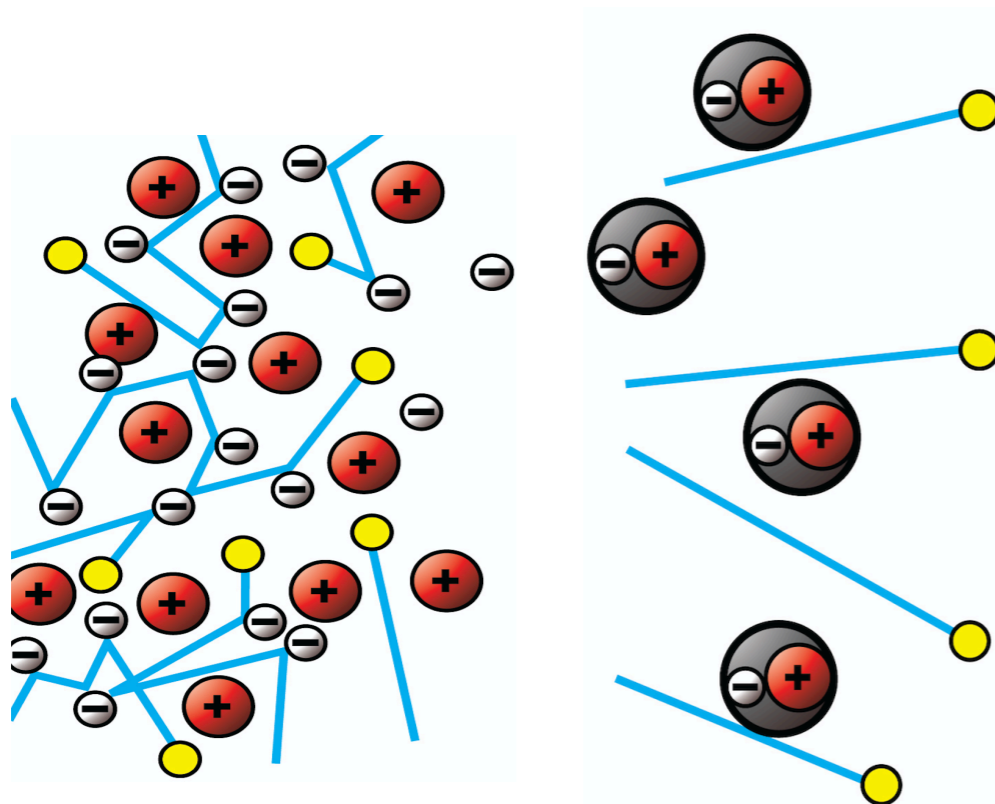


图 4-10

本章重点

4.7 等离子体 (电浆)

当物质温度升高或受到电离时,电子和正离子分离,形成由电子和正离子组成的物质状态.这种电离物质在宏观上保持电中性,称为等离子体.等离子体物理在天体物理,受控核聚变等领域内有着重要应用.本节讨论等离子体的一些主要电磁性质.



A dim view

A map of the universe looks back in time to the cosmic dark ages, the interval between the time when radiation left over from the Big Bang streamed freely into space and when galaxies produced enough ultraviolet light to reionize the universe. Hubble, shown, cannot see that far back.

通常介质中,电子是束缚在原子内的,在电场和磁场作用下,产生比较简单的极化和磁化现象。等离子体和通常介质不同,它的电子和离子不是束缚着的,在电磁场作用下,它们会发生流体运动。等离子体的热运动、流体力学运动和电磁场耦合在一起,因而一般情形下的等离子体电磁性质方程是比较复杂的,等离子体内的电磁现象也表现出很丰富的物理内容,如磁流体力学、等离子体振荡等。我们对等离子体的电磁性质方程不作一般的讨论。在某些条件

1. 等离子体的准电中性和屏蔽库仑场 先考察在热平衡条件下在等离子体内放置一个静止点电荷的情况. 设外电荷位置为 $x=0$, 电荷密度为 $\rho(x) = q\delta(x)$. 在此点电荷的电场作用下, 电子被吸引靠近原点而正离子被排斥离开原点. 在热平衡时等离子体内有一定的正离子密度分布 $n_i(x)$ 和负离子(电子)密度分布 $n_e(x)$. 设正离子带电荷 Ze . 总电场强度 E 是所有电荷(包括外电荷和等离子体内的电荷分布 $Zn_i e$ 和 $-n_e e$)所产生的场. 因此, 电势 φ 满足泊松方程

$$\epsilon_0 \nabla^2 \varphi = -Zn_i e + n_e e - q\delta(x). \quad (7.1)$$

通常可以忽略正离子的运动, 只考虑电子的运动. 在电势 φ 的作用下, 达到热平衡时的电子分布是玻尔兹曼分布, 即

$$n_e(x) = n_{e0} e^{-\frac{e\varphi(x)}{kT}}, \quad (7.2)$$

式中 n_{e0} 是在电势 $\varphi=0$ 时的电子密度, T 为电子气体的温度. 若 $kT \gg e\varphi$, 有

$$n_e \approx n_{e0} \left(1 + \frac{e\varphi}{kT}\right), \quad (7.2a)$$

因此,

$$\epsilon_0 \nabla^2 \varphi = -(Zn_i - n_{e0})e + n_{e0} \frac{e^2 \varphi}{kT} - q\delta(x). \quad (7.3)$$

n_{e0} 常数

$n_e(\vec{x})$ 空间函数

电场只是将电子重分布

由于等离子体在整体上是电中性的, 有 $Zn_i = n_{e0}$, 因此

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right)\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{x}), \quad (7.4)$$

$$\lambda^2 = \frac{kT\epsilon_0}{n_{e0}e^2}. \quad (7.5)$$

(7.2)和(7.3)式反映了电场和等离子体的相互制约. 由(7.2)式, 电场改变了热平衡下的电子密度分布; 由(7.3)式, 电子密度的变化又反过来激发电场.

等离子体内的泊松方程(7.4)式与真空中的方程比较多了一项 $-\varphi/\lambda^2$. (7.4)式的解是

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda}. \quad \text{推导} \quad (7.6)$$

此式的证明和真空中 ∇^2 算子格林函数的证明相似(见第二章§5).

当 $r \ll \lambda$ 时, φ 与库仑势相同. 但当 $r \gg \lambda$ 时, φ 很快趋于零.

当 $r \ll \lambda$ 时, φ 与库仑势相同. 但当 $r \gg \lambda$ 时, φ 很快趋于零.

(7.6)式称为屏蔽库仑势, 它表示短程相互作用, 作用力程 $r \approx \lambda$. λ 称为屏蔽长度. 外电荷在 $r \sim \lambda$ 的范围内被吸引来的电子所屏蔽.

负电荷呢? 正离子不会动

等离子体内任意外电荷分布 $\rho_e(\mathbf{x})$ 产生的电势为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho_e(\mathbf{x}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{-|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/\lambda} d\mathbf{x}', \quad (7.7)$$

上式也适用于等离子体内由于密度涨落而引起的净电荷分布 ρ . 由于屏蔽效应, 这种局域性净电荷的影响也在屏蔽长度 λ 之外被消除. 因此, 在线度 $l \gg \lambda$ 范围内, 可以把等离子体看作电中性的. 这种性质称为准电中性.

$$\frac{F(\text{stat2})}{F(\text{stat1})} = e^{\frac{E_1 - E_2}{k_B T}}$$

下面我们忽略正离子的运动,只考虑电子流体的运动.设电子密度为 n ,速度为 \mathbf{v} .电子流体运动满足下面两个方程

守恒方程
$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{v}) = 0, \quad (7.8)$$

$$m \frac{d \mathbf{v}}{dt} = m \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -e\mathbf{E}. \quad (7.9)$$

其中第一式是电子流体运动的连续性方程,第二式是电子流体在电场作用下运动的方程, d/dt 是运流导数.在(7.9)式中,我们忽略了电子流体的粘滞性和由热运动引起的热压强作用.

设平衡时电子密度为 n_0 .在平衡态中电子的电荷密度被离子的电荷密度完全抵消.因此产生电场的电荷密度是偏离平衡的值 $-(n - n_0)e$,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -(n - n_0)e / \epsilon_0 \quad (7.10)$$

(7.8)—(7.10)式是等离子体的流体运动和电场相互制约的方程.

我们只考虑在平衡态附近的微小振荡.设 $n' = n - n_0$ 及 \mathbf{v} 为

一级小量,把方程(7.8)–(7.10)线性化后得

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}, \quad (7.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{e}{\epsilon_0} n'. \quad (7.13)$$

取(7.12)式的散度得

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{e}{m} \nabla \cdot \mathbf{E}. \quad (7.12a)$$

两边分别用(7.11)和(7.13)代入得

$$\frac{\partial^2 n'}{\partial t^2} + \frac{e^2 n_0}{m \epsilon_0} n' = 0. \quad (7.14)$$

解得

$$n'(t) = n'(0) e^{i\omega_p t}, \quad (7.15)$$

$$\vec{E} = E(t) \cdot \vec{r}$$

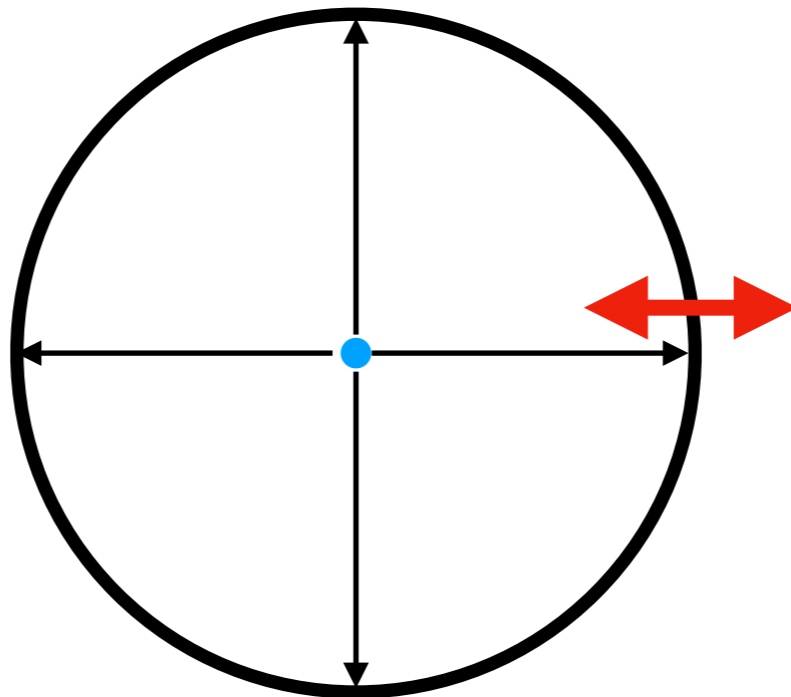
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = n'(t)$$

sin

E(t) changing sign!

$$\vec{v} = \int E(t) dt \cdot \vec{r}$$

cos



2. 等离子体振荡 等离子体在热平衡时是准电中性的。若等离子体内部受到某种扰动而使其中一些区域内电荷密度不为零，就会产生强的静电恢复力，使等离子体内的电荷分布发生振荡。这种振荡主要是由电场和等离子体的流体运动相互制约所形成的。

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}}. \quad (7.16)$$

ω_p 称为等离子体频率。

大气中的电离层是稀薄的等离子体， n_0 为 $10^{10} \sim 10^{12} \text{m}^{-3}$ ，它的等离子体频率 $f_p = \omega_p / 2\pi = 1 \sim 10 \text{MHz}$ 。

以上结果是在忽略热压强作用的近似下导出的。如果考虑热压强的作用，电子等离子体振荡可以在空间中传播，形成等离子体波。

eE+pressure force

空间散度

3. 电磁波在等离子体中的传播 上面分析了等离子体受到自身密度涨落产生的电场作用而振荡的规律. 现在我们研究电磁波在等离子体内的传播. 在这情形下, 等离子体除了受到自身产生的电场 E_i 的作用之外, 还受到电磁波的外电场 E_e 的作用. 当电子速度小时, 电磁波磁场对等离子体的作用可以忽略.

在导出(7.11—7.13)式的同样近似之下, 等离子体的运动方程为

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (7.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m} (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_e), \quad (7.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_i = -\frac{e}{\epsilon_0} n'. \quad (7.19)$$

首先我们说明内电场 E_i 的作用和外电场 E_e 的作用可以分离. 由于电磁波的电场有 $\nabla \cdot \mathbf{E}_e = 0$, 取(7.18)式的散度得

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{e}{m} \nabla \cdot \mathbf{E}_i. \quad (7.18a)$$

用(7.17)式和(7.19)式代入, 所得 n' 的方程与等离子体振荡的方程(7.14)一致. 把等离子体振荡部分分离出来之后, 电子受电磁波电场作用的运动方程为

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

线性方程

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_e. \quad (7.20)$$

对电流密度 $\mathbf{J} = -n_0 e \mathbf{v}$,有

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \frac{n_0 e^2}{m} \mathbf{E}_e. \quad (7.21)$$

这就是在电磁波作用下,稀薄等离子体的电磁性质方程. 这方程形式上和超导体的伦敦第一方程[第三章(5.5)式]一样. 这是由于我们忽略了在等离子体中由于电子碰撞所产生的阻尼,电子受到电场作用而加速.

对频率为 ω 的电磁波,令

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_e(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \quad (7.22)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}_e$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{J}. \quad (7.23)$$

代入(7.21)式得

$$\mathbf{J} = i \frac{n_0 e^2}{m\omega} \mathbf{E}_e. \quad (7.24)$$

如果形式上把(7.24)式写为欧姆定律的形式

$$\mathbf{J}(\omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}_e(\omega), \quad (7.25)$$

则电导率 $\sigma(\omega)$ 为一纯虚数:

如果形式上把(7.24)式写为欧姆定律的形式

$$\mathbf{J}(\omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}_e(\omega), \quad (7.25)$$

则电导率 $\sigma(\omega)$ 为一纯虚数:

$$\sigma(\omega) = i \frac{n_0 e^2}{m\omega}. \quad (7.26)$$

纯虚数的电导率表示电流与电场有 90° 相位差, 因而没有欧姆能量损耗.

现在我们可以形式上应用导体内电磁波传播的公式. 把(3.9)式复电容率 $\epsilon' = \epsilon + i\sigma/\omega$ 中的 σ 用纯虚数(7.26)式代入, 得有效电容率

$$\epsilon' = \epsilon - \frac{n_0 e^2}{m\omega^2}. \quad (7.27)$$

等离子体内电磁波的波数为

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon'} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \left(1 - \frac{n_0 e^2}{m\epsilon_0 \omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \quad (7.28)$$

式中取 $\epsilon \approx \epsilon_0$, ω_p 为等离子体频率(7.16)式. 等离子体的折射率为

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \quad n = c/v \quad (7.29)$$

在等离子体内, $n < 1$, 电磁波的相速大于真空中的光速 c . 当电磁波从空气入射到电离层上时, 折射角大于入射角. 当入射角 $\theta > \theta_c$, ($\sin\theta_c = n$) 时, 出现全反射现象, 电磁波从电离层反射回地球表面. 地球上的短波通讯就是通过电离层的反射来实现的.

微观物理? 若 $\omega < \omega_p$, 则 k 为纯虚数, 电磁波不能在等离子体内传播. 因此, 等离子体频率 ω_p 也就是电磁波在等离子体内传播的截止频率.