

# 电动力学B

Bin HU

[bhu@bnu.edu.cn](mailto:bhu@bnu.edu.cn)

Astro@BNU

Office: 南院F座101

# 2. 静电场

本章我们把电磁场的基本理论应用到最简单的情况：电荷静止，相应的电场不随时间而变化的情况。本章研究的主要问题是：在给定的自由电荷分布以及周围空间介质和导体分布的情况下，怎样求解静电场。

Monopole:  $E \sim \frac{Q}{r^2}$ ,  ~~$\frac{\dot{Q}}{r}$~~  ← 电荷守恒

**[L]=[t]**

Dipole:  $E \sim \frac{P}{r^3}$ ,  $\frac{\dot{P}}{r^2}$ ,  $\frac{\ddot{P}}{r}$

However, the first-order spatial moment of a charge distribution,  $\mathbf{P} = \sum Q_i \mathbf{s}_i$ , is *not* a conserved quantity: we can change it freely by moving a charge around, or by separating pairs of balanced positive and negative charges. This is also called the *electric dipole moment*, since it is the first and most significant nonzero moment of an electric dipole (i.e. a pair of balanced positive and negative charges). As shown earlier, we get  $1/r$  transverse electromagnetic radiation, or *dipole radiation*, when  $\partial^2 \mathbf{P} / \partial t^2 = \sum Q_i \mathbf{a}_i \neq 0$

# 2.1 静电场的标势 &微分方程

1. 静电场的标势 在静止情况下, 电场与磁场无关, 麦氏方程组的电场部分为

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \quad (1.2)$$

(1.1)式表示静电场的无旋性, (1.2)式表示自由电荷分布  $\rho$  是电位移  $\mathbf{D}$  的源. 这两方程连同介质的电磁性质方程是解决静电问题的基础.

静电场的无旋性是它的一个重要特性, 由于无旋性, 我们可以引入一个标势来描述静电场, 和力学中用势函数描述保守力场的方法一样. 无旋性的积分形式是电场沿任一闭合回路的环量等于零,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

物理上, 凡是积分为零的关系, 总能定义出一个守恒量出来!

设  $C_1$  和  $C_2$  为由  $P_1$  点到  $P_2$  点的两条不同路径.  $C_1$  与  $-C_2$  合成闭合回路, 因此

$$\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

即

$$\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

因此, 电荷由  $P_1$  点移至  $P_2$  点时电场对它所作的功与路径无关, 而只和两端点有关. 把单位正电荷由  $P_1$  点移至  $P_2$  点, 电场  $\mathbf{E}$  对它所作的功为

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

这功定义为  $P_1$  点和  $P_2$  点的电势差. 若电场对电荷作了正功, 则电势  $\varphi$  下降. 由此,

$$\varphi(P_2) - \varphi(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.4)$$

由这定义, 只有两点的电势差才有物理意义, 一点上的电势的绝对数值是没有物理意义的.

相距为  $dl$  的两点的电势差为

$$d\varphi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

由于

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l}$$

因此, 电场强度  $\mathbf{E}$  等于电势  $\varphi$  的负梯度

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

跟牛顿 / 珀松  
引力势一样!

$$\vec{F} = \frac{8\pi GM\hat{r}}{r^2} \quad (m=1)$$

$$\vec{F} = \nabla\phi$$

$$\phi = \frac{8\pi GM}{r}$$

的情况下, 常常选无穷远点作为参考点. 令  $\varphi(\infty)=0$ , 由(1.4)式得

$$\varphi(P) = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.4a)$$

公式(1.4)和(1.5)是电场强度和电势相互关系的一般公式. 由这些公式, 当已知电场强度时, 可以求出电势; 反过来, 已知电势  $\varphi$  时, 通过求梯度就可以求得电场强度.

下面我们计算给定电荷分布所激发的电势. 已知点电荷  $Q$  激发的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r},$$

其中  $r$  为源点到场点的距离. 把此式沿径向由场点到无穷远点积分, 把积分变数写为  $r'$ , 由(1.4a)式得

$$\varphi(P) = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.6)$$

由电场的叠加性, 多个电荷激发的电势  $\varphi$  等于每个电荷激发的电势的代数和. 设有一组点电荷  $Q_i$ , 与场点  $P$  的距离为  $r_i$ , 则这组点电荷激发的电势为

$$\varphi(P) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}.$$

若电荷连续分布, 电荷密度为  $\rho$ , 设  $r$  为由源点  $x'$  到场点  $x$  的距离(参看图 1-1), 则场点  $x$  处的电势为

$$\varphi(x) = \int \frac{\rho(x')dV'}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.7)$$

## back reaction problem

由上式,假如空间中所有电荷分布都给定,电势  $\varphi$ ,因而电场  $E$  就完全确定。但是实际情况往往不是所有电荷分布都能够预先给定的。例如,在某一给定电荷附近放着一个导体,则导体表面上就会产生感应电荷分布,这个电荷分布正是要从电场与电荷相互作用的规律求出来,而不是预先给定的。由于导体表面上的电荷分布是未知函数,因而就不能应用(1.7)式来计算空间中的电势



和电场。问题在于(1.7)式只反映电荷激发电场这一方面,而没有反映场对电荷作用的方面。在上述例子中,实际上包括了下面一些物理过程:给定电荷激发了电场,电场作用到导体自由电子上,引起它们运动,使电荷在导体上重新分布,最后在总电场(包括给定电荷和导体上感应电荷激发的电场)作用下达达到平衡静止状态。在这静止状态下,导体表面上的感应电荷有确定的分布密度,而空间中的电场也同时确定。由这例子看出,电荷和电场是互相制约着的。一方面感应电荷的出现是由电场引起的,另一方面电场又受到感应电荷的影响。我们要同时解出这问题中的电场和感应电

2. 静电势的微分方程和边值关系 在均匀各向同性线性介质中,  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , 把(1.5)式代入(1.2)式得

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad (1.8)$$

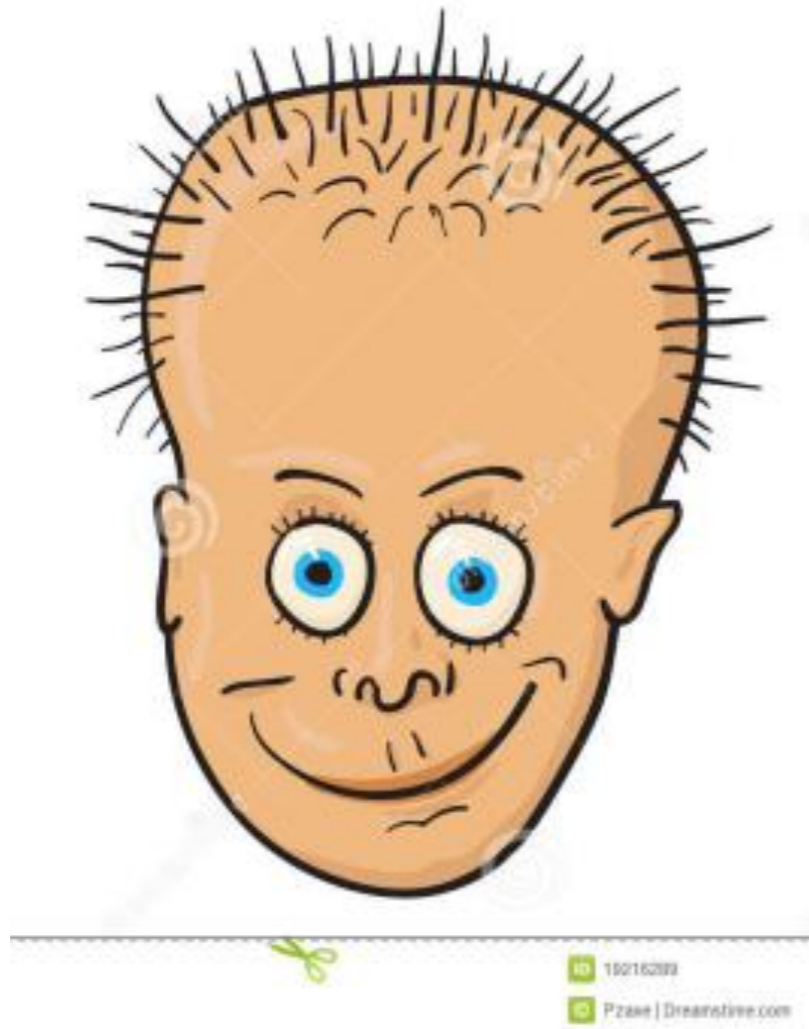
$\rho$  为自由电荷密度。上式是静电势满足的基本微分方程, 称为泊松(Poisson)方程。给出边界条件就可以确定电势  $\varphi$  的解。

在两介质界面上, 电势  $\varphi$  必须满足边值关系。我们需要把电场的边值关系

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma, \quad (1.10)$$

化为电势的边值关系。如图 2-1, 考虑介质 1 和介质 2 分界面两



化为电势的边值关系。如图 2-1, 考虑介质 1 和介质 2 分界面两侧相邻的两点  $P_1$  和  $P_2$ 。由于电场强度有限, 而  $P_1P_2 \rightarrow 0$ , 把电荷由  $P_1$  移至  $P_2$  所作的功亦趋于零, 因此界面两侧的电势相等

$$\underline{\varphi_1 = \varphi_2}, \quad (1.11)$$

即在界面上,电势  $\varphi$  是连续的. 电势连续条件(1.11)式可以代替电场边值关系(1.9)式. 因为,设  $P'_1$  和  $P'_2$  为边界两侧相邻的另外两点,由电势连续条件有  $\varphi'_1 = \varphi'_2$ ,因而

$$\varphi'_1 - \varphi_1 = \varphi'_2 - \varphi_2.$$

设  $P_1$  和  $P'_1$  相距  $\Delta l$ , 则  $\varphi'_1 - \varphi_1 = -E_1 \cdot \Delta l$ , 同样,  $\varphi'_2 - \varphi_2 = -E_2 \cdot \Delta l$ , 因此

$$E_1 \cdot \Delta l = E_2 \cdot \Delta l.$$

由于  $\Delta l$  为界面上任一线元, 上式表示界面两边电场的切向分量相等, 与(1.9)式一致.

另一边值关系(1.10)式用势表出为

$$\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\sigma. \quad (1.12)$$

式中  $n$  为由介质 1 指向介质 2 的法线,  $\sigma$  为界面上的自由电荷面密度. (1.11)和(1.12)式是在界面上静电势所满足的边值关系.

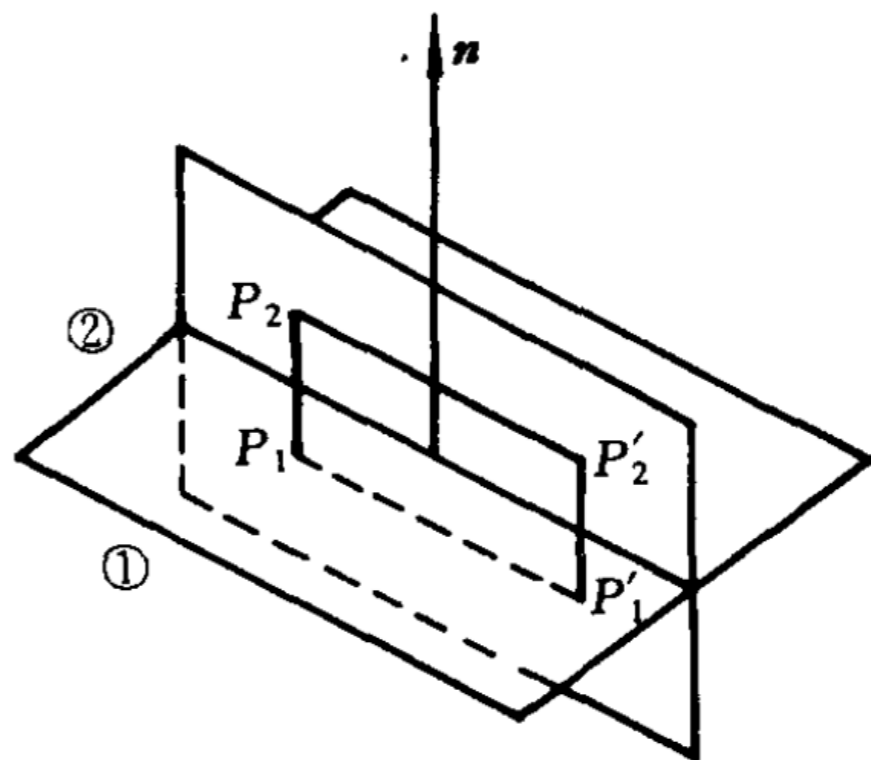


图 2-1

特点：导体内部有自由电子，在电场作用下这些电子就会运动。  
因此，在静止情况下，导体内部电场必须为零，而且导体表面上的  
电场亦不能有切向分量，否则电子将沿表面运动。导体内部没有  
电场的必要条件是导体内部不带电，导体所带电荷只能分布于表  
面上。因此，导体的静电条件归结为

(1) 导体内部不带电，电荷只能分布于导体表面上；

(2) 导体内部电场为零；

(3) 导体表面上电场必沿法线方向，因此导体表面为等势面。

整个导体的电势相等；

设导体表面所带电荷面密度为  $\sigma$ , 设它外面的介质电容率为  $\epsilon$ , 由(1.11)和(1.12)式和导体静电条件得导体表面的边界条件

$$\varphi = \text{常量}, \quad (1.11a)$$

$$\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\sigma. \quad (1.12a)$$

3. 静电场能量 由第一章 §6 可知,在线性介质中静电场的总能量为

$$W = \frac{1}{2} \int_{\infty} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV. \quad (1.13)$$

在静电情形下,  $W$  可以用电势和电荷分布表出. 由  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$  和  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$  得

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} &= -\nabla\varphi \cdot \mathbf{D} = -\nabla \cdot (\varphi\mathbf{D}) + \varphi \nabla \cdot \mathbf{D} \\ &= -\nabla \cdot (\varphi\mathbf{D}) + \rho\varphi. \end{aligned}$$

因此,

$$W = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dV - \frac{1}{2} \int \nabla \cdot (\varphi\mathbf{D}) dV.$$

式中右边第二项是散度的体积分,它可以化为面积分(见附录 I.7 式)

$$\int \nabla \cdot (\varphi\mathbf{D}) dV = \oint \varphi\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}.$$

面积分遍及无穷远界面. 由于  $\varphi \sim \frac{1}{r}$ ,  $D \sim \frac{1}{r^2}$ , 而面积  $\sim r^2$ , 所以面积分当  $r \rightarrow \infty$  时趋于零, 因此

$$W = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dV. \quad (1.14)$$

这公式是通过电荷分布和电势表示出来的静电场总能量. 注意这



公式只有作为静电场总能量才有意义,不应该把 $\frac{1}{2}\rho\varphi$ 看作能量密度,因为我们知道能量是分布于电场内,而不仅在电荷分布区域内.

(1.14)式中的  $\varphi$  是由电荷分布  $\rho$  激发的电势. 若全空间充满均匀介质,介电常数为  $\epsilon$ ,由(1.7)和(1.14)式可以得到电荷分布  $\rho$  所激发的电场总能量

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon} \int dV \int dV' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{r}, \quad (1.15)$$

式中  $r$  为  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{x}'$  点的距离.

我们可以应用(1.13)—(1.15)各式中任一公式来计算静电场总能量。在静电场中之所以能够通过电荷分布来表示电场能量，是因为在这情况下电场决定于电荷分布，在场内没有独立的运动，因而场的能量就由电荷分布所决定。在非恒定情况下，电场和磁场互相激发，其形式就是独立于电荷分布之外的电磁波运动，因而场的总能量不可能完全通过电荷或电流分布表示出来。由第一章

例2 均匀带电的无限长直导线的电荷线密度为  $\tau$ , 求电势.

解 如图 2-2, 设场点  $P$  到导线的垂直距离为  $R$ , 电荷元  $\tau dz$  到  $P$  点的距离为  $\sqrt{z^2 + R^2}$ , 由(1.7)式得

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau dz}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} \\ &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln(z + \sqrt{z^2 + R^2}) \Big|_{-\infty}^{\infty}. \end{aligned}$$

积分结果是无穷大. 无穷大的出现和电荷不是有限区域内的分布有关. 计算两点  $P$  和  $P_0$  的电势差可以

不出现无穷大. 设  $P_0$  点与导线的垂直距离为  $R_0$ , 则  $P$  点和  $P_0$  点的电势差为

$$\begin{aligned} \varphi(P) - \varphi(P_0) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z + \sqrt{z^2 + R^2}}{z + \sqrt{z^2 + R_0^2}} \Big|_{-M}^M \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + R^2/M^2}}{1 + \sqrt{1 + R_0^2/M^2}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{1 + R_0^2/M^2}}{-1 + \sqrt{1 + R^2/M^2}} \right] \\ &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_0^2}{R^2} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{R_0}. \end{aligned}$$

若选  $P_0$  点为参考点, 规定  $\varphi(R_0) = 0$ , 则

$$\varphi(R) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{R_0}. \quad (1.17)$$

取  $\varphi$  的梯度得

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R}, \quad E_\theta = E_z = 0.$$

用高斯定理也可以得出这结果.

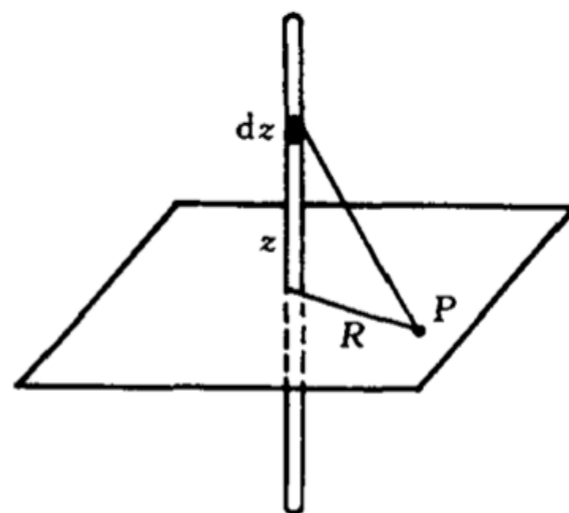


图 2-2

## 2.2 唯一性定理

在上节中我们说明静电学的基本问题是求出在所有边界上满足边值关系或给定边界条件的泊松方程的解。本节我们把这问题确切地表述出来，即需要给出哪一些条件，静电场的解才能唯一地被确定。

**1. 静电问题的唯一性定理** 下面我们研究可以均匀分区的区域  $V$ , 即  $V$  可以分为若干个均匀区域  $V_i$ , 每一均匀区域的电容率为  $\epsilon_i$ . 设  $V$  内有给定的电荷分布  $\rho(\mathbf{x})$ . 电势  $\varphi$  在均匀区域  $V_i$  内满足泊松方程

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon_i, \quad (2.1)$$

在两区域  $V_i$  和  $V_j$  的分界面上满足边值关系

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \varphi_j, \\ \epsilon_i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_i &= \epsilon_j \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_j.\end{aligned}\quad (2.2)$$

泊松方程(2.1)式和边值关系(2.2)式是电势所必须满足的方程，它们属于电场的基本规律。除此之外，要完全确定  $V$  内的电场，还必须给出  $V$  的边界  $S$  上的一些条件。下面提出的唯一性定理具体指出所需给定的边界条件。

唯一性定理：设区域  $V$  内给定自由电荷分布  $\rho(\mathbf{x})$ ，在  $V$  的边界  $S$  上给定

(i) 电势  $\varphi|_S$

或

(ii) 电势的法向导数  $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S$ ，

则  $V$  内的电场唯一地确定。也就是说，在  $V$  内存在唯一的解，它在每个均匀区域内满足泊松方程(2.1)，在两均匀区域分界面上满足边值关系，并在  $V$  的边界  $S$  上满足给定的  $\varphi$  或  $\partial\varphi/\partial n$  值。

证明自己看

2. 有导体存在时的唯一性定理 当有导体存在时,由实践经验我们知道,为了确定电场,所需条件有两种类型:一类是给定每

个导体上的电势  $\varphi_i$ ,另一类是给定每个导体上的总电荷  $Q_i$ .

为简单起见,我们只讨论区域内含一种均匀介质的情形.如图 2-3,设在某区域  $V$  内有一些导体,我们把除去导体内部以后的区域称为  $V'$ ,因而  $V'$  的边界包括界面  $S$  以及每个导体的表面  $S_i$ . 设  $V'$  内有给定电荷分布  $\rho$ ,  $S$  上给

定  $\varphi|_S$  或  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$  值. 对上述第一种类型的问题,每个导体上的电势  $\varphi_i$  亦给定,即给出了  $V'$  所有边界上的  $\varphi$  或  $\partial\varphi/\partial n$  值,因而由上一小节证明了的唯一性定理可知,  $V'$  内的电场唯一地被确定.

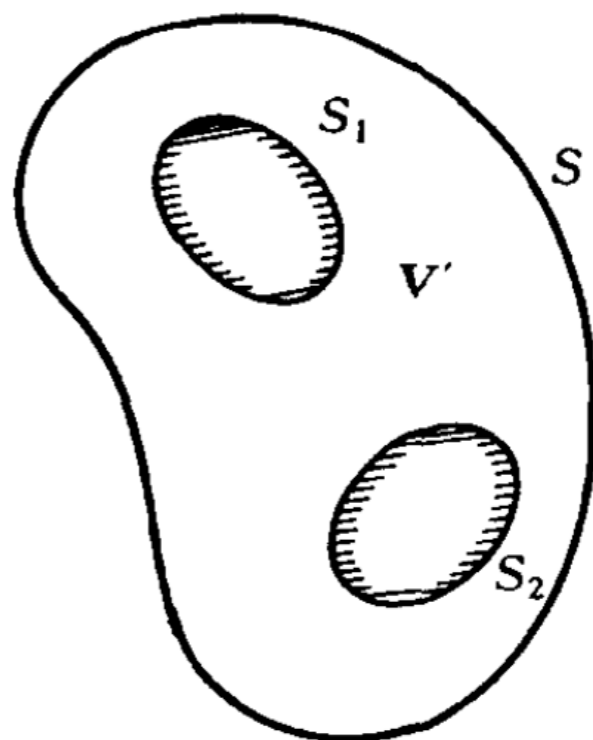


图 2-3

对于第二种类型的问题,唯一性定理表述如下:

设区域  $V$  内有一些导体,给定导体之外的电荷分布  $\rho$ , 给定各导体上的总电荷  $Q_i$  以及  $V$  的边界  $S$  上的  $\varphi$  或  $\partial\varphi/\partial n$  值,则  $V$  内的电场唯一地确定. 也就是说,存在唯一的解,它在导体以外满足泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon, \quad (2.8)$$

在第  $i$  个导体上满足总电荷条件

$$-\oint_{S_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = Q_i/\epsilon, \quad (2.9)$$

( $n$  为导体面的外法线)和等势面条件

$$\varphi|_{S_i} = \varphi_i = \text{常量}, \quad (2.10)$$

以及在  $V$  的边界  $S$  上具有给定的  $\varphi|_S$  或  $\partial\varphi/\partial n|_S$  值.

**证明自己看**



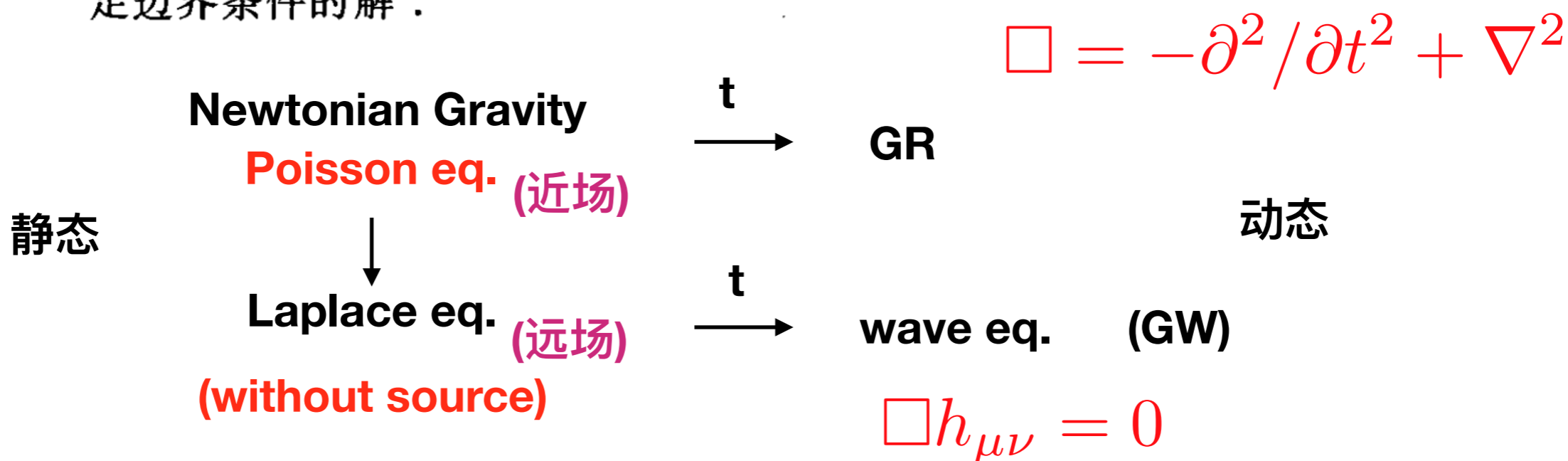
# 2.3 Laplace equation & 分离变量法

在许多实际问题中,静电场是由带电导体决定的.例如电容器内部的电场是由作为电极的两个导体板上所带电荷决定的;又如电子光学系统的静电透镜内部,电场是由分布于电极上的自由

电荷决定的.这些问题的特点是自由电荷只出现在一些导体的表面上,在空间中没有其他自由电荷分布.因此,如果我们选择这些导体表面作为区域  $V$  的边界,则在  $V$  内部自由电荷密度  $\rho=0$ ,因而泊松方程化为比较简单的拉普拉斯(Laplace)方程

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (3.1)$$

产生这电场的电荷都分布于区域  $V$  的边界上,它们的作用通过边界条件反映出来.因此,这类问题的解法是求拉普拉斯方程的满足边界条件的解.



## 天体物理过程中，我们会遇到许多的球对称情况！

(3.1)式的通解可以用分离变量法求出。先根据界面形状选择适当的坐标系，然后在该坐标系中用分离变量法解拉普拉斯方程。最常用的坐标系有球坐标系和柱坐标系。这里我们写出用球坐标系得出的通解形式(见附录 II)。球坐标用 $(R, \theta, \phi)$ 表示， $R$ 为半径， $\theta$ 为极角， $\phi$ 为方位角。拉氏方程在球坐标中的通解为

$$\begin{aligned} \varphi(R, \theta, \phi) = & \sum_{n,m} \left( a_{nm} R^n + \frac{b_{nm}}{R^{n+1}} \right) P_n^m(\cos\theta) \cos m\phi \\ & + \sum_{n,m} \left( c_{nm} R^n + \frac{d_{nm}}{R^{n+1}} \right) P_n^m(\cos\theta) \sin m\phi \end{aligned} \quad (3.2)$$

式中  $a_{nm}, b_{nm}, c_{nm}$  和  $d_{nm}$  为任意常数，在具体问题中由边界条件定出。 $P_n^m(\cos\theta)$  为缔合勒让德(Legendre)函数。若该问题中具有对称轴，取此轴为极轴，则电势  $\varphi$  不依赖于方位角  $\phi$ ，这情形下通解为

$$\varphi = \sum_n \left( a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta), \quad (3.3)$$

$P_n(\cos\theta)$  为勒让德函数， $a_n$  和  $b_n$  是任意常数，由边界条件确定。

在每一个没有电荷分布的区域内， $\varphi$  满足拉普拉斯方程，其通解已由(3.2)或(3.3)式给出，剩下的问题就是由边界条件确定这些通解中所含的任意常数，得到满足边界条件的特解。下面举一

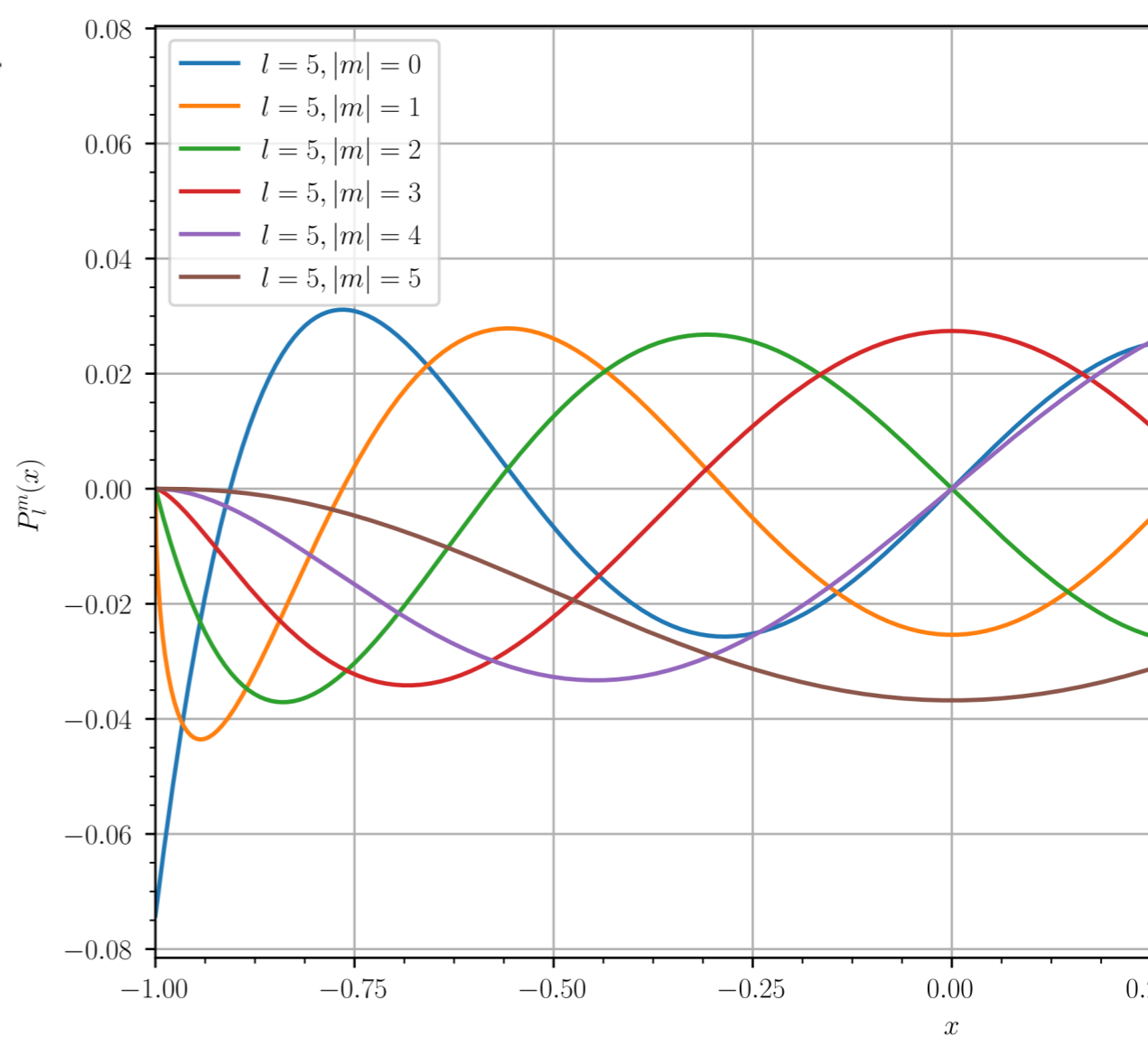
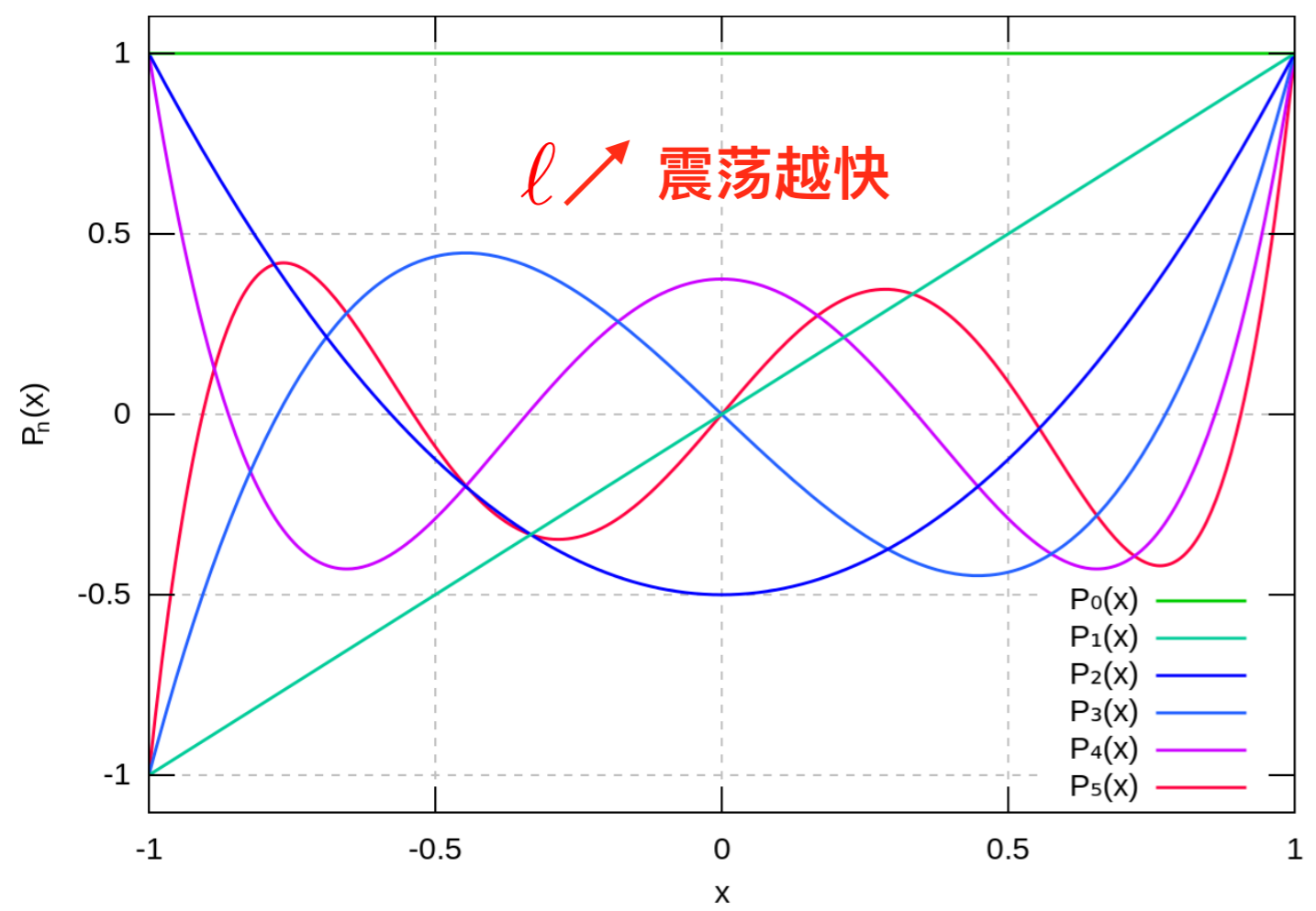
$n$	$P_n(x)$
0	1
1	$x$
2	$\frac{1}{2} (3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x)$
6	$\frac{1}{16} (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
7	$\frac{1}{16} (429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$
8	$\frac{1}{128} (6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$
9	$\frac{1}{128} (12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x)$
10	$\frac{1}{256} (46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63)$

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x)$$

等号右边的上标 ( $m$ ) 表示求  $m$  次导。

$$0 \leq m \leq l$$

$m \nearrow$  类比于  $l \searrow$



例2 电容率为  $\epsilon$  的介质球置于均匀外电场  $E_0$  中,求电势.

解 介质球在外电场中极化,在它表面上产生束缚电荷. 这些束缚电荷激发的电场叠加在原外电场  $E_0$  上,得总电场  $E$ . 束缚电荷分布和总电场  $E$  互相制约,边界条件正确地反映这种制约关系.

设球半径为  $R_0$ ,球外为真空(图 2-5). 这问题具有轴对称性,对称轴为通过球心沿外电场  $E_0$  方向的轴线,取此轴线为极轴.

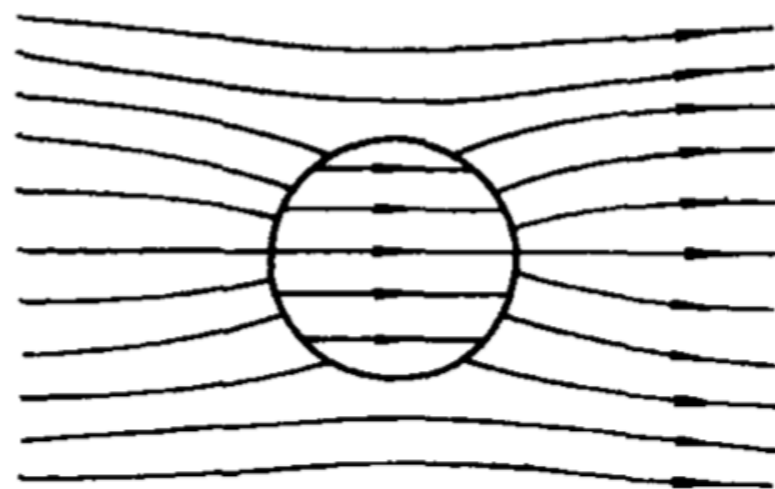


图 2-5

介质球的存在使空间分为两均匀区域——球外区域和球内区域. 两区域内部都没有自由电

荷,因此电势  $\varphi$  都满足拉普拉斯方程. 以  $\varphi_1$  代表球外区域的电势,  $\varphi_2$  代表球内的电势. 由(3.3)式,两区域的通解为

$$\varphi_1 = \sum_n \left( a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta), \quad (3.11)$$

$$\varphi_2 = \sum_n \left( c_n R^n + \frac{d_n}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta). \quad (3.12)$$

$a_n, b_n, c_n$  和  $d_n$  是待定常数. 边界条件包括:

(1) 无穷远处,  $E \rightarrow E_0$ , 由第一节例 1 得

$$\varphi_1 \rightarrow -E_0 R \cos\theta = -E_0 R P_1(\cos\theta). \quad (3.13)$$

因而

$$a_1 = -E_0, \quad a_n = 0 \quad (n \neq 1). \quad (3.14)$$

(2)  $R=0$  处,  $\varphi_2$  应为有限值, 因此

$$d_n = 0. \quad (3.15)$$

(3) 在介质球面上 ( $R=R_0$ ),

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = \epsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial R}. \quad (3.16)$$

把(3.11)和(3.12)式代入得

$$E_0 R_0 P_1(\cos\theta) + \sum_n \frac{b_n}{R_0^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \sum_n c_n R_0^n P_n(\cos\theta), \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} & -E_0 P_1(\cos\theta) - \sum_n \frac{(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos\theta) \\ & = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \sum_n n c_n R_0^{n-1} P_n(\cos\theta). \end{aligned}$$

比较  $P_1$  的系数得

$$\begin{aligned} -E_0 R_0 + \frac{b_1}{R_0^2} &= c_1 R_0, \\ -E_0 - \frac{2b_1}{R_0^3} &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0} c_1, \end{aligned} \quad (3.18)$$

由(3.18)式解出

$$b_1 = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 R_0^3, \quad c_1 = -\frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0. \quad (3.19)$$

比较(3.17)式其他  $P_n$  项的系数可解出

$$b_n = c_n = 0, \quad n \neq 1. \quad (3.20)$$

所有常数已经定出, 因此本问题的解为

$$\varphi_1 = -E_0 R \cos\theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \frac{E_0 R_0^3 \cos\theta}{R^2}, \quad (3.21)$$

$$\varphi_2 = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 R \cos\theta.$$

现在讨论此解的物理意义。由(3.21)式,球内电场为 $\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0$ ,因为 $\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}$ 总小于1,所以球内电场比原外场 $E_0$ 为弱,这是由于介质球极化后在右半球面上产生正束缚电荷,在左半球面上产生负束缚电荷,因而在球内束缚电荷激发的场与原外场反向,使总电场减弱。在球内总电场作用下,介质的极化强度为

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} 3\varepsilon_0 \mathbf{E}_0. \quad (3.22)$$

介质球的总电偶极矩为

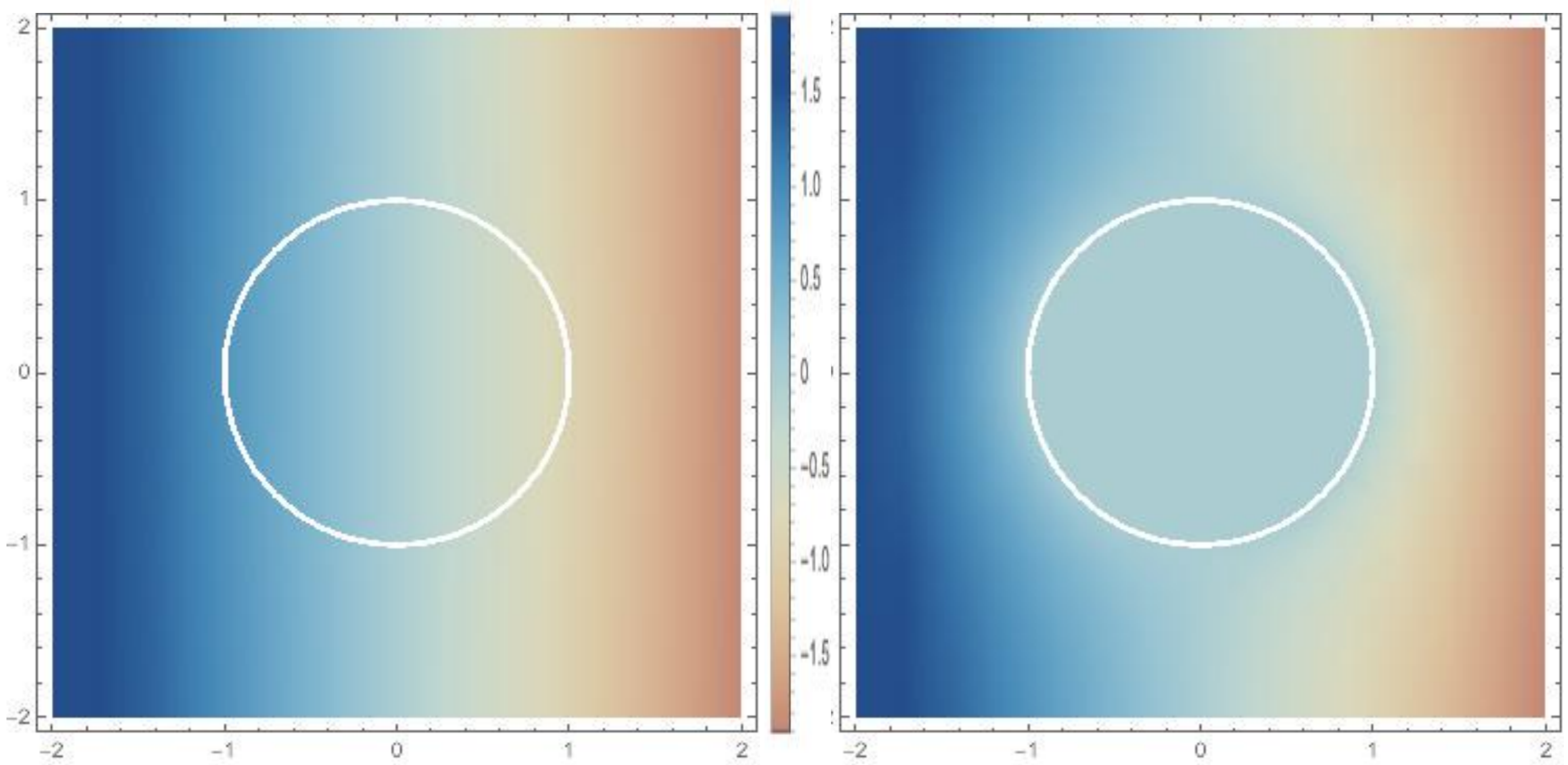
$$\mathbf{p} = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \mathbf{P} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} 4\pi\varepsilon_0 R_0^3 \mathbf{E}_0. \quad (3.23)$$

(3.21)式 $\varphi_1$ 中的第二项正是这个电偶极矩所产生的电势

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{R^3} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \frac{E_0 R_0^3}{R^2} \cos\theta. \quad (3.24)$$

均匀电场对介质颗粒的吸引力来分选矿粒的。在非均匀电场中,若在颗粒体积之内电场变化不大,则介质颗粒的偶极矩大致上由(3.23)式表示,其中 $E_0$ 为颗粒所在处的外电场。颗粒极化后受到非均匀电场的吸引力,吸引力的大小依赖于 $\varepsilon$ ,由此可以分选不同矿质的颗粒。

# 作业



$$\epsilon = 1.3\epsilon_0$$

基本一直是轴对称

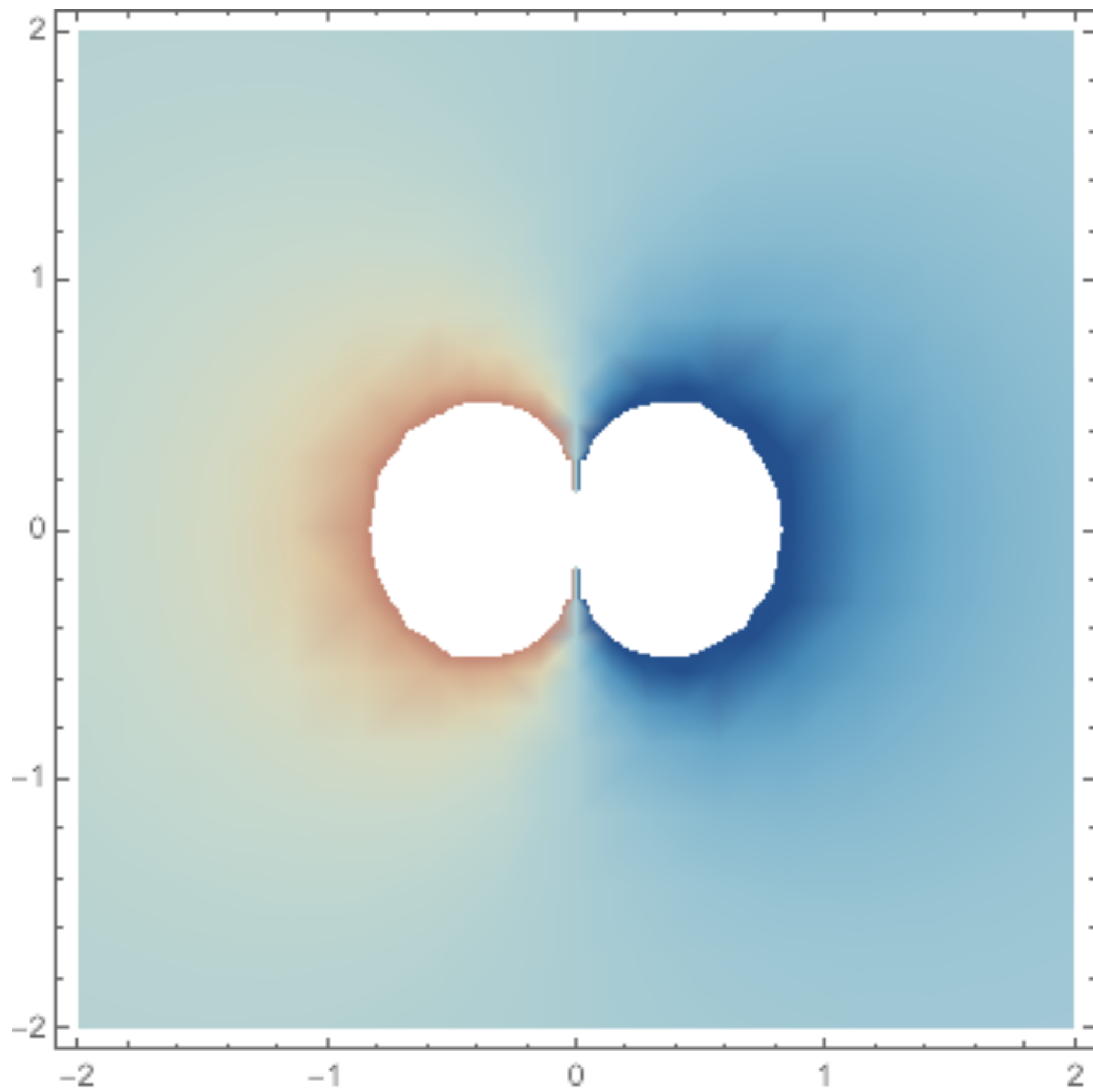
(次生电场  $\ll$  原电场)

$$\epsilon = 10^4\epsilon_0$$

球对称  $\xrightarrow{\text{过度}}$  轴对称

(次生电场  $\sim$  原电场)





例 4 导体尖劈带电势  $V$ , 分析它的尖角附近的电场.

解 用柱坐标系. 取  $z$  轴沿尖边. 设尖劈以外的空间, 即电场存在的空间为  $0 \leq \theta \leq 2\pi - \alpha$  ( $\alpha$  为小角). 因  $\varphi$  不依赖于  $z$ , 柱坐标下的拉氏方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3.27)$$

用分离变量法解此方程. 设  $\varphi$  的特解为  $\varphi = R(r) \mathcal{H}(\theta)$ , 则上式分解为两个方程

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} = \nu^2 R,$$
$$\frac{d^2 \mathcal{H}}{d\theta^2} + \nu^2 \mathcal{H} = 0.$$

其中  $\nu$  为某些正实数或 0. 把  $\varphi$  的特解叠加得  $\varphi$  的通解

$$\varphi = (A_0 + B_0 \ln r)(C_0 + D_0 \theta) + \sum_{\nu} (A_{\nu} r^{\nu} + B_{\nu} r^{-\nu})(C_{\nu} \cos \nu \theta + D_{\nu} \sin \nu \theta). \quad (3.28)$$

各待定常量和  $\nu$  的可能值都由边界条件确定.

在尖劈  $\theta = 0$  面上,  $\varphi = V$ , 与  $r$  无关, 由此

$$A_0 C_0 = V, \quad B_0 = 0,$$
$$C_{\nu} = 0 \quad (\nu \neq 0).$$

因  $r \rightarrow 0$  时  $\varphi$  有限, 得

$$B_0 = B_{\nu} = 0.$$

在尖劈  $\theta = 2\pi - \alpha$  面上, 有  $\varphi = V$ , 与  $r$  无关, 必须

$$D_0 = 0,$$
$$\sin \nu (2\pi - \alpha) = 0,$$

因此  $\nu$  的可能值为

$$\nu_n = \frac{n}{2 - \frac{\alpha}{\pi}}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.29)$$

考虑这些条件,  $\varphi$  可以重写为

$$\varphi = V + \sum_n A_n r^{\nu_n} \sin \nu_n \theta. \quad (3.30)$$

为了确定待定常量  $A_n$ , 还必须用某一大曲面包围着电场存在的区域, 并给定这曲面上的边界条件. 因此, 本题所给的条件是不完全的, 还不足以确定全空间的电场. 但是, 我们可以对尖角附近的电场作出一定的分析.

在尖角附近,  $r \rightarrow 0$ , (3.30) 式的求和式的主要贡献来自  $r$  最低幂次项, 即  $n = 1$  项. 因此,

$$\varphi \approx V + A_1 r^{\nu_1} \sin \nu_1 \theta, \quad (3.31)$$

电场为

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \approx -\nu_1 A_1 r^{\nu_1 - 1} \sin \nu_1 \theta, \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \approx -\nu_1 A_1 r^{\nu_1 - 1} \cos \nu_1 \theta. \end{aligned} \quad (3.32)$$

尖劈两面上的电荷面密度为

$$\begin{aligned} \sigma = \epsilon_0 E_n &= \begin{cases} \epsilon_0 E_\theta & (\theta = 0) \\ -\epsilon_0 E_\theta & (\theta = 2\pi - \alpha) \end{cases} \\ &\approx -\epsilon_0 \nu_1 A_1 r^{\nu_1 - 1}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

若  $\alpha$  很小, 有  $\nu_1 \approx \frac{1}{2}$ , 尖角附近的场强和电荷面密度都近似地正比于  $r^{-\frac{1}{2}}$ . 由此可见, 尖角附近可能存在很强的电场和电荷面密度. 相应的三维针尖问题就是尖端放电现象.

## 2.4 镜像法

没有自由电荷分布的情况。若求解电场的区域内有自由电荷,我们必须解泊松方程:一种重要的特殊情形是区域内只有一个或几个点电荷,区域边界是导体或介质界面。现在介绍解这类问题的一种特殊方法。

例 1 接地无限大平面导体板附近有一点电荷  $Q$ , 求空间中的电场.

解 从物理上分析, 在点电荷  $Q$  的电场作用下, 导体板上出现感应电荷分布. 若  $Q$  为正的, 则感应电荷为负的. 空间中的电场是由给定的点电荷  $Q$  以及导体面上的感应电荷共同激发的, 而另一方面感应电荷分布又是在总电场作用下达到平衡的结果. 平衡的条件就是导体的静电条件, 即导体表面为一等势面. 所以这问题的边界条件是

$$\varphi = \text{常数} \quad (\text{导体面上}),$$

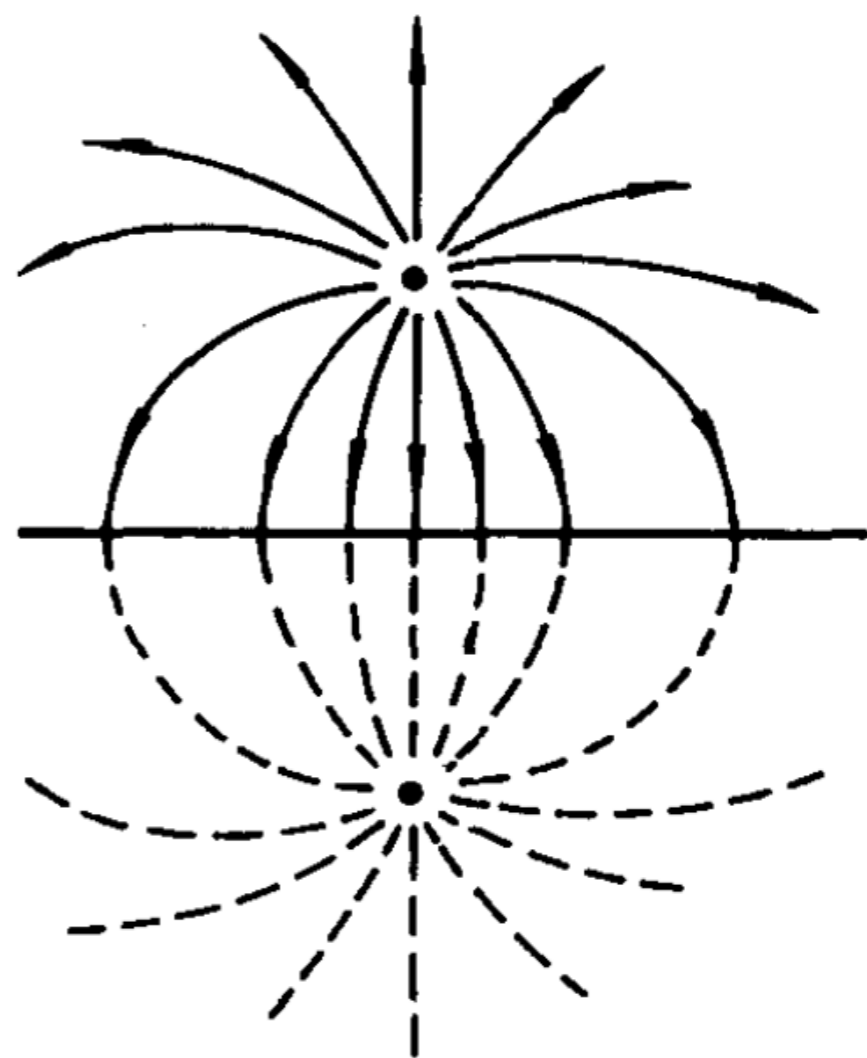


图 2-6

或者说,电场线必须与导体平板垂直。

怎样才能满足这一边界条件呢? 我们设想,感应电荷对空间电场的作用能否用一个假想电荷来代替? 如图 2-6,设想在导体板下方与电荷  $Q$  对称的位置上放一个假想电荷  $Q'$ ,然后把导体板抽去。若  $Q' = -Q$ ,则假想电荷  $Q'$  与给定电荷  $Q$  激发的总电场如图所示,由对称性容易看出,在原导体板平面上,电场线处处与它正交,因而边界条件得到满足。因此,导体板上的感应电荷确实可以用板下方一个假想电荷  $Q'$  代替。 $Q'$  称为  $Q$  的镜象电荷。

导体板上部空间的电场可以看作原电荷  $Q$  与镜象电荷  $Q' = -Q$  共同激发的电场。以  $r$  表示  $Q$  到场点  $P$  的距离, $r'$  表示象电荷  $Q'$  到  $P$  的距离, $P$  点的电势为

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{r} - \frac{Q}{r'} \right). \quad (4.1a)$$

选  $Q$  到导体板上的投影点  $O$  作为坐标原点,设  $Q$  到导体板的距离为  $a$ ,有

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \right]. \quad (4.1b)$$

## 2.5 Green function

本节研究较普遍的边值问题: 给定  $V$  内电荷分布  $\rho$  和  $V$  的边界  $S$  上各点的电势  $\varphi_S$  或电场法向分量  $\partial\varphi/\partial n|_S$ , 求  $V$  内各点电势值. 如果边界条件是给定  $S$  上的电势, 这类边值问题称为第一类边值问题, 如果给定  $S$  上的  $\partial\varphi/\partial n|_S$ , 这类边值问题称为第二类边值问题.

1. 点电荷密度的  $\delta$  函数表示 点电荷是电荷分布的极限情况,它可以看作一个体积很小而电荷密度很大的带电小球的极限.若电荷分布于小体积  $\Delta V$  内,当体积  $\Delta V \rightarrow 0$  时,体积内的电荷密度  $\rho \rightarrow \infty$ ,而保持总电荷不变,所谓点电荷就是这种电荷分布.处于原点上的单位点电荷的密度用函数  $\delta(\mathbf{x})$  表示. $\delta$  函数定义如下:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x}) &= 0, \quad \text{当 } \mathbf{x} \neq 0, \\ \int_V \delta(\mathbf{x}) dV &= 1, \quad \text{若积分区域 } V \text{ 包含 } \mathbf{x} = 0 \text{ 点.} \end{aligned} \quad (5.1)$$

由这定义可见,在  $\mathbf{x} = 0$  点上  $\delta(\mathbf{x})$  必须为无穷大.因此, $\delta(\mathbf{x})$  不是通常意义下的函数,但是我们可以把它作为某些连续函数的极限来理解.图 2-9 示意地表示  $\delta$  函数作为连续函数的极限.当宽度  $2a \rightarrow 0$ ,而保持曲线下的面积等于 1 时,这极限就可以看作  $\delta$  函数. $\delta$  函数在近代物理学中有着广泛的应用.数学上它是一种广义函数,可以用严格的数学方法处理.

处于  $\mathbf{x}'$  点上的单位点电荷的密度用函数  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  表示

$$\rho(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (5.2)$$



此式当  $x \neq x'$  时其值为零, 而对包括  $x'$  点在内的区域积分值等于 1.

$$\delta(x - x') = 0, \quad \text{当 } x \neq x',$$

$$\int_V \delta(x - x') dx = 1, \quad \text{当 } x' \in V.$$

(5.3)

$\delta$  函数有如下重要性质: 若  $f(x)$  为在原点附近的连续函数,  $V$  包括原点在內, 有

$$\int_V f(x) \delta(x) dV = f(0).$$

同样, 若  $V$  包括  $x'$  点在內, 而  $f(x)$  在  $x = x'$  点附近连续, 有

$$\int_V f(x) \delta(x - x') dx = f(x'). \quad (5.4)$$

上式可以由  $\delta$  函数定义推出. 由于  $\delta(x - x')$  仅在  $x = x'$  点上不为零, 所以上式左边的积分实际上仅须对包围  $x'$  点的任意小区域积分. 在该处  $f(x)$  的值为  $f(x')$ , 而  $\delta$  函数积分值为 1, 因此积分结果得出  $f(x')$ .

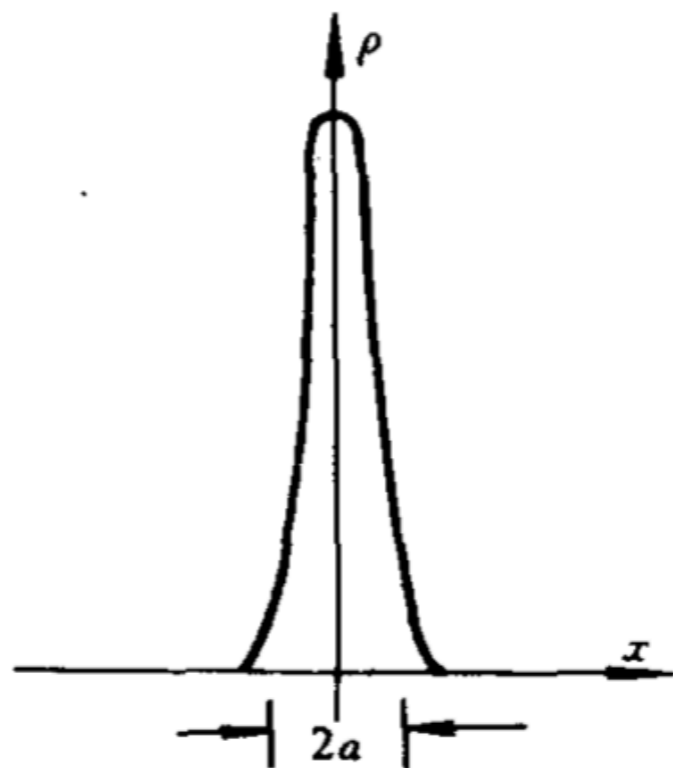


图 2-9

## 源为 $\delta$ 函数的Poisson方程的解

2. **格林函数** 一个处于  $\boldsymbol{x}'$  点上的单位点电荷所激发的电势  $\psi(\boldsymbol{x})$  满足泊松方程

$$\nabla^2 \psi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'). \quad (5.5)$$

设有包含  $\boldsymbol{x}'$  点的某空间区域  $V$ , 在  $V$  的边界  $S$  上有边界条件

$$\psi|_S = 0, \quad (5.6)$$

则(5.5)式的满足边界条件(5.6)式的解称为泊松方程在区域  $V$  的第一类边值问题的格林函数. 若在  $S$  上有另一边界条件

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_S = -\frac{1}{\epsilon_0 S}, \quad (5.7)$$

( $n$  为  $S$  的法线), 则(5.5)式的满足边界条件(5.7)式的解称为泊

## 源为 $\delta$ 函数的Poisson方程的解

松方程在区域  $V$  的第二类边值问题的格林函数。

格林函数一般用  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  表示, 其中  $\mathbf{x}'$  代表源点, 即点电荷所在点,  $\mathbf{x}$  代表场点。在(5.5)式中把  $\psi(\mathbf{x})$  写为  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , 得格林函数所满足的微分方程

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (5.8)$$

这方程中的  $\nabla^2$  算符 是对  $\mathbf{x}$  点的微分算符。

(1) 无界空间的格林函数 .

在  $x'$  点上一个单位点电荷在无界空间中激发的电势为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}.$$

式中  $r$  为源点  $x'$  到场点  $x$  的距离 . 因此, 无界空间的格林函数为

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}, \quad (5.9)$$

现在我们证明此式满足格林函数方程(5.8)式 . 为计算方便, 选电荷所在点  $x'$  为坐标原点, 即  $x' = 0$ . 在球坐标中,  $G(\mathbf{x}, 0) =$

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$ , 由直接计算得

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \right] = 0, \quad \text{若 } r \neq 0.$$

在  $r=0$  点,  $1/r$  奇异, 上式不成立 . 因此,  $\nabla^2 \frac{1}{r}$  是这样一个函数, 它在  $r \neq 0$  处的值为零, 只有在  $r=0$  点上可能不等于零 . 为了进一步确定这一函数, 我们采用极限方法 .

$$\begin{aligned} \int \nabla^2 \frac{1}{r} dV &= \lim_{a \rightarrow 0} \int \nabla^2 \frac{1}{(r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} dV \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int d\Omega \int_0^\infty \frac{-3a^2 r^2 dr}{(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad \text{[推导?]} \end{aligned}$$

作积分变数变换  $r = a\rho$ , 可见上式的极限存在,

$$\begin{aligned}\int \nabla^2 \frac{1}{r} dV &= -12\pi \int_0^\infty \frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2 + 1)^{5/2}} = -4\pi \frac{\rho^3}{(\rho^2 + 1)^{3/2}} \Big|_0^\infty \\ &= -4\pi.\end{aligned}$$

因此我们证明了

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{x}).$$

一般情形下, 若源点为  $\mathbf{x}'$ ,  $r$  为  $\mathbf{x}'$  到  $\mathbf{x}$  的距离, 有

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (5.10)$$

因此证明了(5.9)式为无界空间的格林函数.

$$\delta(Q) + \delta(-Q)$$

(2) 上半空间的格林函数 .

当  $Q=1$  时,由上节(4.1)式可得上半空间第一类边值问题的格林函数 . 以导体平面上任一点为坐标原点,设点电荷  $Q$  所在点的坐标为  $(x', y', z')$ ,场点坐标为  $(x, y, z)$ ,则(4.1)式中的  $r$  为由  $x'$  点到  $x$  点的距离,  $r'$  为由镜象点  $(x', y', -z')$  到场点的距离 . 上半空间格林函数为

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right]. \quad (5.11)$$

$$\delta(Q) + \delta(-Q)$$

(3) 球外空间的格林函数 .

当  $Q=1$  时由(4.6)式可得球外空间的格林函数 . 如图 2-10, 以球心  $O$  为坐标原点 . 设电荷所在点  $P'$  的坐标为  $(x', y', z')$ , 场点  $P$  的坐标为  $(x, y, z)$ . 令

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, R' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

则上节例 2 中  $a$  对应于  $R'$ ,  $b$  对应于  $R_0^2/R'$ , 镜象电荷所在点的

$$\text{坐标为 } \frac{b}{a} \mathbf{x}' = \frac{R_0^2}{R'^2} \mathbf{x}' .$$

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \alpha},$$

$$r' = \left| \mathbf{x} - \left( \frac{R_0}{R'} \right)^2 \mathbf{x}' \right| = \frac{1}{R'} \sqrt{R^2 R'^2 + R_0^4 - 2R_0^2 RR' \cos \alpha},$$

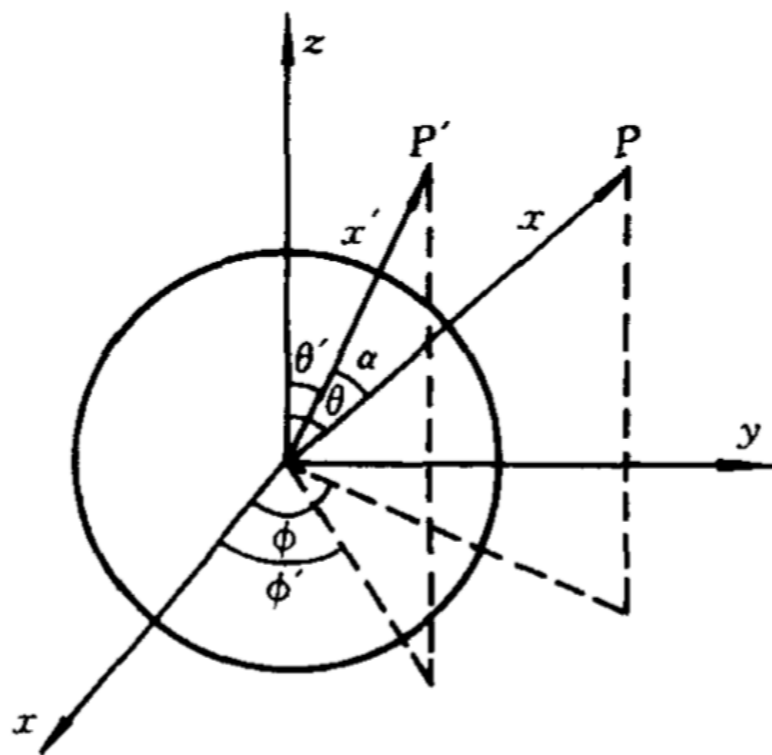


图 2-10

式中  $\alpha$  为  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{x}'$  的夹角。若  $P$  点的球坐标为  $(R, \theta, \phi)$ ,  $P'$  点的球坐标为  $(R', \theta', \phi')$ , 有  $\cos \alpha = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$ . 把 (4.6) 式作以上代换得球外空间格林函数

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{RR'}{R_0} \right)^2 + R_0^2 - 2RR' \cos \alpha}} \right]. \quad (5.12)$$



# 格林函数法解一般电荷分布问题

## 3. 格林公式和边值问题的解

现在阐明如何从格林函数获得一般边值问题的解。先考虑第一类边值问题。设  $V$  内有电荷分布  $\rho$ , 边界  $S$  上给定电势  $\varphi|_S$ , 求  $V$  内的电势  $\varphi(\mathbf{x})$ 。

相应的格林函数问题是:  $V$  内在  $\mathbf{x}'$  点上有一点电荷, 边界  $S$  上给定电势  $= 0$ , 则  $V$  内电势的解为  $\psi(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 。

用格林公式可以把这两问题的解联系起来。设区域  $V$  内有

两个函数  $\varphi(\mathbf{x})$  和  $\psi(\mathbf{x})$ , 有格林公式

$$\int_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dV = \oint_S \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS. \quad (5.13)$$

式中  $n$  为界面  $S$  上的外向法线. 格林公式证明如下: 由

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \varphi) = \nabla \psi \cdot \nabla \varphi + \psi \nabla^2 \varphi,$$

减去  $\psi$  和  $\varphi$  互换位置的相应公式得

$$\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi = \nabla \cdot (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi).$$

因此(5.13)式左边是一个散度的体积分, 它可化为面积分

$$\int_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dV = \oint_S (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S}.$$

格林公式得证.

格林公式对两任意函数  $\varphi$  和  $\psi$  适用. 现在我们取  $\varphi$  满足泊松方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (5.14)$$

取  $\psi$  为格林函数  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , 它满足方程(5.8). 为方便起见, 我们把格林公式中的积分变量  $\mathbf{x}$  改为  $\mathbf{x}'$ ,  $G$  中的  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{x}'$  互换, 得

$$\begin{aligned} & \int_V [G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \nabla'^2 \varphi(\mathbf{x}') - \varphi(\mathbf{x}') \nabla'^2 G(\mathbf{x}', \mathbf{x})] dV' \\ &= \oint_S \left[ G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \right] dS'. \end{aligned} \quad (5.15)$$

由(5.8)和(5.4)式, 上式左边第二项为

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int \varphi(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV' = \frac{1}{\epsilon_0} \varphi(\mathbf{x}),$$

(5.15)式左边第一项用(5.14)式代入, 即得

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) = & \int_V G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') dV' + \epsilon_0 \oint_S \left[ G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right. \\ & \left. - \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \right] dS'. \end{aligned} \quad (5.16)$$

在第一类边值问题中, 格林函数满足边界条件

$$G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = 0, \quad \text{当 } \mathbf{x}' \text{ 在 } S \text{ 上.} \quad (5.17)$$

由(5.16)式得第一类边值问题的解

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) = & \int_V G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') dV' \\ & - \epsilon_0 \oint_S \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) dS'. \end{aligned} \quad (5.18)$$

由这公式,只要知道格林函数  $G(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ ,在给定边界上的  $\varphi|_S$  值情形下就可算出区域内的  $\varphi(\mathbf{x})$ ,因而第一类边值问题完全解决.

对第二类边值问题,由于  $G(\mathbf{x}', \mathbf{x})$  是  $\mathbf{x}$  点上单位点电荷所产生的电势,其电场通量在边界面  $S$  上应等于  $\frac{1}{\epsilon_0}$ ,即

$$- \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{x})}{\partial n'} dS' = \frac{1}{\epsilon_0}.$$

满足上式的最简单的边界条件是(5.7)式,即

$$\left. \frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{x})}{\partial n'} \right|_{\mathbf{x}' \in S} = -\frac{1}{\epsilon_0 S}. \quad (5.19)$$

其中  $S$  是界面的总面积。由(5.16)式得第二类边值问题的解

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) = & \int_V G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') dV' \\ & + \epsilon_0 \oint_S G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}')}{\partial n'} dS' + \langle \varphi \rangle_S.\end{aligned}\tag{5.20}$$

其中  $\langle \varphi \rangle_S$  是电势在界面  $S$  上的平均值。

由(5.18)和(5.20)式可见, 只要求出区域  $V$  内的格林函数, 则一般边值问题就得到解决。但是, 求格林函数本身一般不是容易的, 只有当区域具有简单几何形状时才能得出解析的解。上节介绍的镜象法就是解格林函数的一种方法。

格林函数法也可以用来解拉普拉斯方程的边值问题。当  $\rho = 0$  时, (5.18)和(5.20)式就是拉普拉斯方程的相应边值问题的解。

**例** 在无穷大导体平面上有半径为  $a$  的圆, 圆内和圆外用极狭窄的绝缘环绝缘. 设圆内电势为  $V_0$ , 导体板其余部分电势为 0, 求上半空间的电势.

**解** 以圆心为柱坐标系原点,  $z$  轴与平板垂直,  $R$  为空间点到  $z$  轴的距离.  $x$  点的直角坐标为  $(R \cos \phi, R \sin \phi, z)$ ,  $x'$  点的直角坐标为  $(R' \cos \phi', R' \sin \phi', z')$ , 上半空间格林函数(5.11)式用柱坐标表出为

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2 + R'^2 + z'^2 - 2zz' - 2RR' \cos(\phi - \phi')}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2 + R'^2 + z'^2 + 2zz' - 2RR' \cos(\phi - \phi')}} \right]. \quad (5.21)$$

因为在上半空间  $\rho = 0$ , 因此这问题是拉普拉斯方程第一类边值问题. 由(5.18)式, 上半空间的电势为

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\epsilon_0 \oint_S \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) dS', \quad (5.22)$$

积分面  $S$  是  $z' = 0$  的无穷大平面. 法线沿  $-z'$  方向. 先计算格林

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\varepsilon_0 \oint_S \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) dS', \quad (5.22)$$

积分面  $S$  是  $z' = 0$  的无穷大平面。法线沿  $-z'$  方向。先计算格林函数的法向导数。

$$-\frac{\partial G}{\partial n'} = \frac{\partial G}{\partial z'} \Big|_{z'=0} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{z}{[R^2 + z^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi')]^{3/2}}. \quad (5.23)$$

由于  $S$  上只有圆内部分电势不为零，因此(5.22)式中的积分只需对  $r \leq a$  积分。

$$\begin{aligned} & -\varepsilon_0 \int \frac{\partial G}{\partial n'} \varphi(\mathbf{x}') dS' \\ &= \frac{V_0}{2\pi} \int_0^a R' dR' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{z}{[R^2 + z^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi')]^{3/2}} \\ &= \frac{V_0 z}{2\pi} \int_0^a R' dR' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \left[ 1 + \frac{R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi')}{R^2 + z^2} \right]^{-3/2}. \end{aligned}$$

当  $R^2 + z^2 \gg a^2$  时，可以把被积函数展开，得

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{x}) &= \frac{V_0 z}{2\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^a R' dR' \\
&\cdot \int_0^{2\pi} d\phi' \left[ 1 - \frac{3 R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi')}{R^2 + z^2} \right. \\
&+ \left. \frac{15 [R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi')]^2}{8 (R^2 + z^2)^2} + \dots \right] \\
&= \frac{V_0 a^2}{2} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \left[ 1 - \frac{3 a^2}{4 R^2 + z^2} + \frac{15 R^2 a^2}{8 (R^2 + z^2)^2} + \dots \right].
\end{aligned}$$



## 2.6 Multiples

1. 电势的多极展开 在 §1 中我们导出了真空中给定电荷密度  $\rho(\mathbf{x}')$  激发的电势

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}') dV'}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (6.1)$$

式中体积分遍及电荷分布区域,  $r$  为场点  $\mathbf{x}$  和源点  $\mathbf{x}'$  的距离.

在许多物理问题中, 电荷只分布于一个小区域内, 而需要求电场强度的地点  $\mathbf{x}$  又距离电荷分布区域比较远, 即在(6.1)式中,  $r$  远大于区域  $V$  的线度  $l$ . 在这种情况下, 可以把(6.1)式表为  $l/r$  的展开式, 由此得出电势  $\varphi$  的各级近似值. 例如原子核的电荷分布于  $\sim 10^{-13}$  cm 线度的范围内, 而原子内电子到原子核的距离  $\sim 10^{-8}$  cm, 因此原子核作用到电子上的电场可以用本节方法求得各级近似值.

如果说引力波辐射必须要由四极矩产生，那么两个黑洞对头正碰会有引力波辐射吗？



$$f(\vec{x}, \vec{x}') \rightarrow f(\vec{x} - \vec{x}')$$

空间均匀性：只于相对位置有关

在区域  $V$  内取一点  $O$  作为坐标原点, 以  $R$  表示由原点到场点  $P$  的距离, 有

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

$\mathbf{x}'$  点在区域  $V$  内变动. 由于区域线度远小于  $R$ , 可以把  $\mathbf{x}'$  各分量看作小参量, 把  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  的函数对  $\mathbf{x}'$  展开. 设  $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  为  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  的任一函数, 在  $\mathbf{x}' = 0$  点附近  $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  的展开式为

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^3 x'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}) + \dots \\
 &= f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}' \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2!} (\mathbf{x}' \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}) + \dots.
 \end{aligned}$$

取  $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = 1/r$ , 有

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} + \dots. \quad (6.2)$$

把展开式(6.2)代入(6.1)式中得

$$\begin{aligned}
 \varphi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') \left[ \frac{1}{R} - \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} + \dots \right] dV'. \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

令

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{x}') dV', \quad (6.4)$$

$$\mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' dV', \quad (6.5)$$

$$\mathcal{D}_{ij} = \int_V 3x'_i x'_j \rho(\mathbf{x}') dV'. \quad (6.6)$$

(6.3)式可写为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{R} - \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{6} \sum_{i,j} \mathcal{D}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} + \dots \right],$$

上式是电荷体系激发的势在远处的多极展开式。 $\mathbf{p}$  称为体系的电偶极矩, 张量  $\mathcal{Q}_{ij}$  称为体系的电四极矩。电四极矩也可以用并矢形式(附录 I.6)写为

$$\overleftrightarrow{\mathcal{Q}} = \int_V 3\mathbf{x}'\mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}')dV'. \quad (6.6a)$$

而展开式(6.7)的第三项用并矢形式写为

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \overleftrightarrow{\mathcal{Q}} : \nabla\nabla \frac{1}{R}.$$

2. 电多极矩 现在我们讨论展开式(6.7)各项的物理意义.

展开式的第一项

$$\varphi^{(0)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (6.8)$$

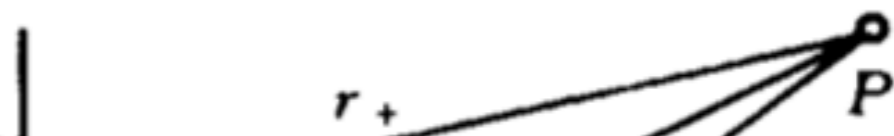
是在原点的点电荷  $Q$  激发的电势. 因此作为第一级近似, 可以把电荷体系看作集中于原点上, 它激发的电势就是(6.8)式.

展开式的第二项

$$\varphi^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{R} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (6.9)$$

是电偶极矩  $\mathbf{p}$  产生的电势. 电荷分布的电偶极矩  $\mathbf{p}$  由(6.5)式定义.

如果一个体系的电荷分布对原点对称, 它的电偶极矩为零. 因为由(6.5)式, 若  $\mathbf{x}'$  点和  $-\mathbf{x}'$  点有相同的电荷密度, 则积分值为零. 因此, 只有对原点不对称的电荷分布才有电偶极矩. 总电荷为零而电偶极矩不为零的最简单的电荷体系是一对正负点电荷.



零。因此，只有对原点不对称的电荷分布才有电偶极矩。总电荷为零而电偶极矩不为零的最简单的电荷体系是一对正负点电荷。设  $x'$  点上有一点电荷  $+Q$ ， $-x'$  点上有一点电荷  $-Q$ ，由(6.5)式，这体系的电偶极矩为

$$p = 2Qx' = Ql. \quad (6.10)$$

$l$  为由负电荷到正电荷的距离。

图 2-11 示具有偶极矩  $p_z = Ql$  的电偶极子，它产生的电势为

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right).$$

由图，若  $l \ll R$ ，有

$$r_+ \approx R - \frac{l}{2} \cos\theta, \quad r_- \approx R + \frac{l}{2} \cos\theta,$$

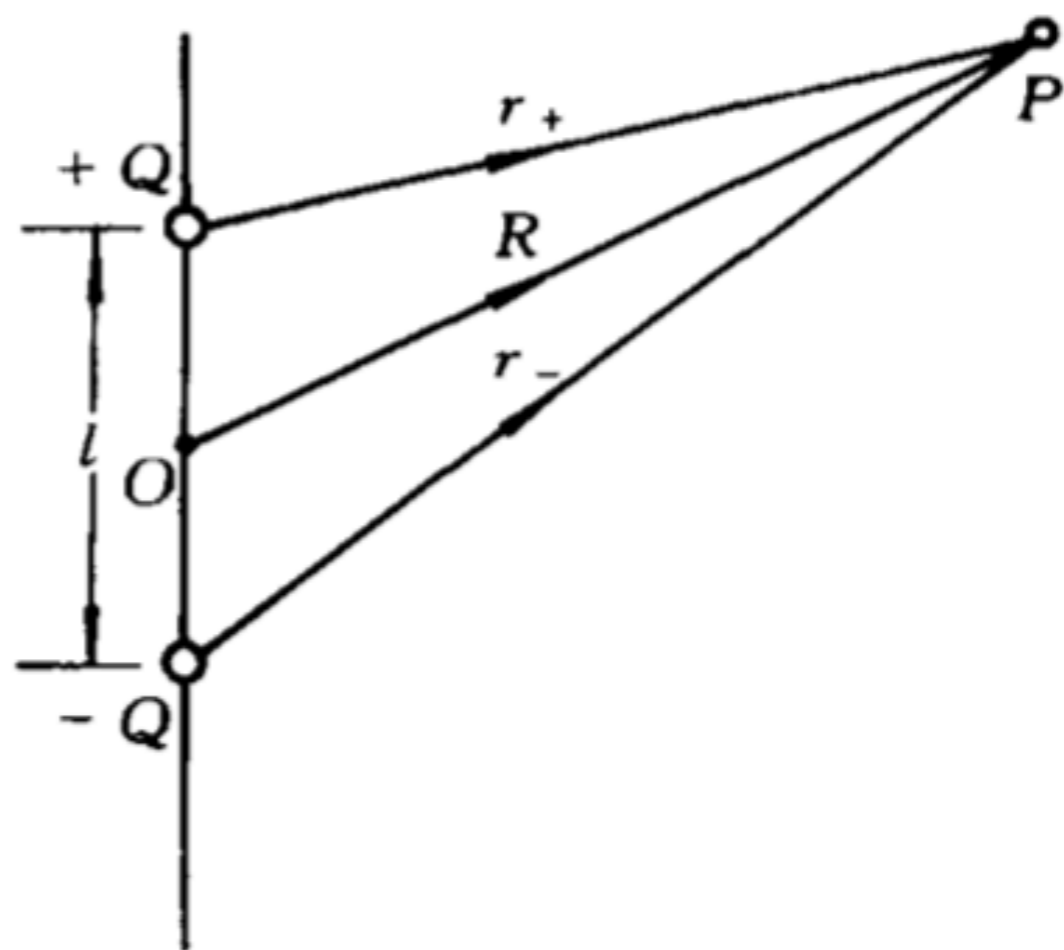


图 2-11

$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \approx \frac{1}{R^2} l \cos\theta = \frac{lz}{R^3} = -l \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R} \right). \quad (6.11)$$

因此这电偶极子产生的电势是

$$\varphi \approx -\frac{Ql}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R}, \quad (6.12)$$

与(6.9)式相符.

展开式(6.7)的第三项

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \sum_{i,j} \mathcal{D}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} \quad (6.13)$$

是电四极矩  $\mathcal{D}_{ij}$  产生的电势. 电荷体系的四极矩  $\mathcal{D}_{ij}$  由(6.6)式定义. 根据此式, 电四极矩张量  $\mathcal{D}_{ij}$  是对称张量, 它有 6 个分量  $\mathcal{D}_{11}$ ,  $\mathcal{D}_{22}$ ,  $\mathcal{D}_{33}$ ,  $\mathcal{D}_{12} = \mathcal{D}_{21}$ ,  $\mathcal{D}_{23} = \mathcal{D}_{32}$ ,  $\mathcal{D}_{31} = \mathcal{D}_{13}$ . (下面将看出实际上只有 5 个独立分量.) 现在我们来讨论这些分量的物理意义.

图 2-12 示  $z$  轴上一对正电荷和一对负电荷组成的体系. 这体系可以看作由一对电偶极子  $+p$  和

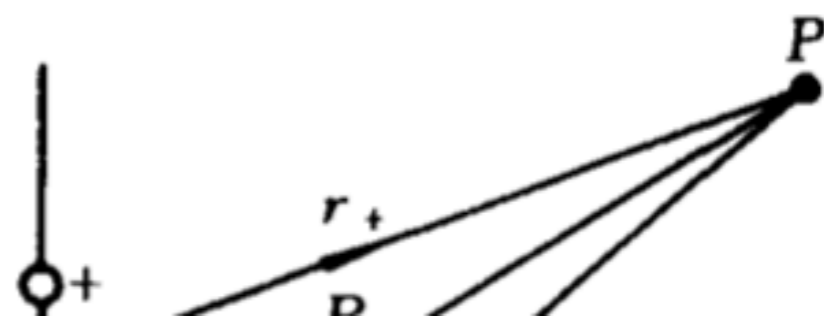




图 2-12 示  $z$  轴上一对正电荷和一对负电荷组成的体系。这体系可以看作由一对电偶极子  $+p$  和  $-p$  组成。设正电荷位于  $z = \pm b$ ，负电荷位于  $z = \pm a$ 。这体系的总电荷为零，总电偶极矩为零，它的电四极矩由 (6.6) 式算出，

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{33} &= 6Q(b^2 - a^2) \\ &= 6Q(b - a)(b + a) \\ &= 6pl. \end{aligned}$$

其中  $p = Q(b - a)$  是其中一对电荷的电偶极矩， $l = b + a$  是两个电偶极子中心的距离。这电荷体系产生的电势是一对反向电偶极子所产生的电势。由图 2-12 和 (6.12) 式得

$$\varphi \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_+} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_-}$$

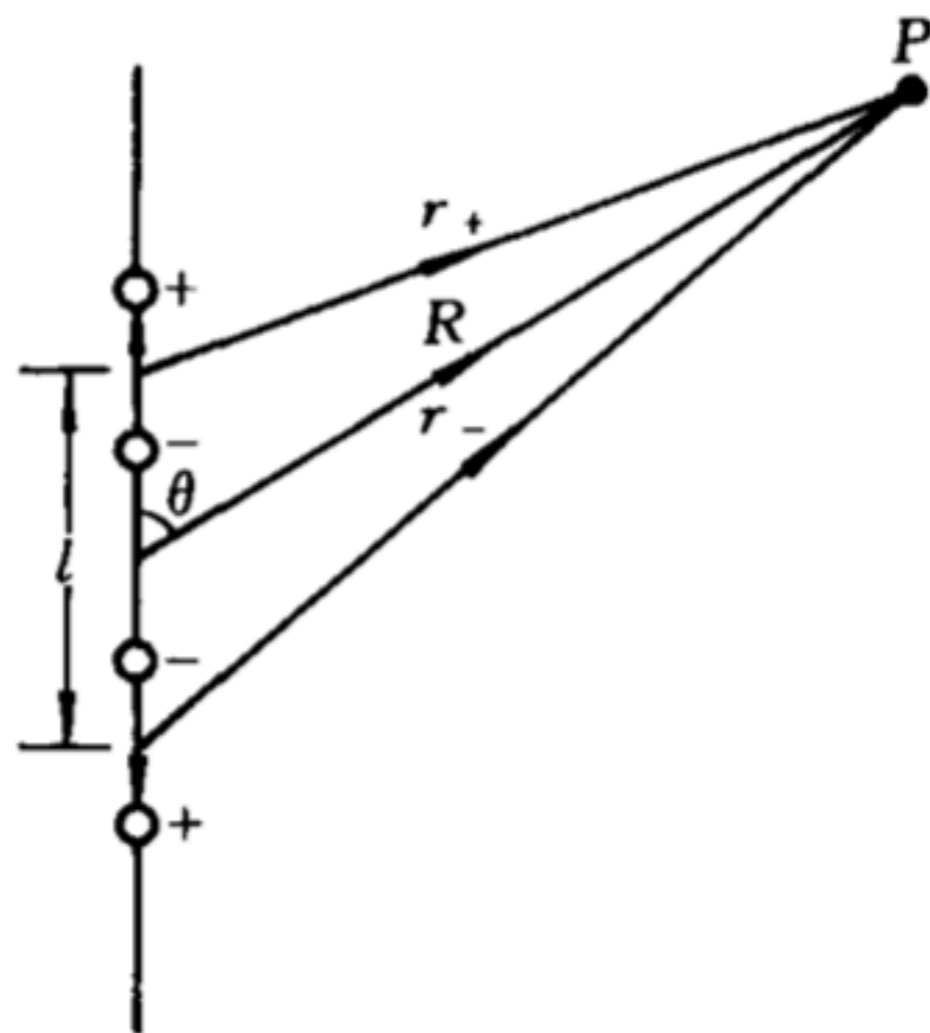


图 2-12

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} pl \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{R} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \mathcal{D}_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{R},
\end{aligned}$$

与(6.13)式相符。

同理,具有  $\mathcal{D}_{11}$  分量的最简单的电荷体系由  $x$  轴上两对正负电荷组成,具有  $\mathcal{D}_{22}$  分量的体系由  $y$  轴上两对正负电荷组成。具有  $\mathcal{D}_{12}$  分量的电荷体系由  $xy$  平面上两对正负电荷组成,余类推。这些电荷体系如图 2-13 所示。

下面我们证明电四极矩只有 5 个独立分量。当  $R \neq 0$  时有

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = 0. \quad (6.14)$$

引入符号  $\delta_{ij}$ , 定义为



$$\nabla \frac{1}{R} = 0.$$

(6.14)

引入符号  $\delta_{ij}$ , 定义为

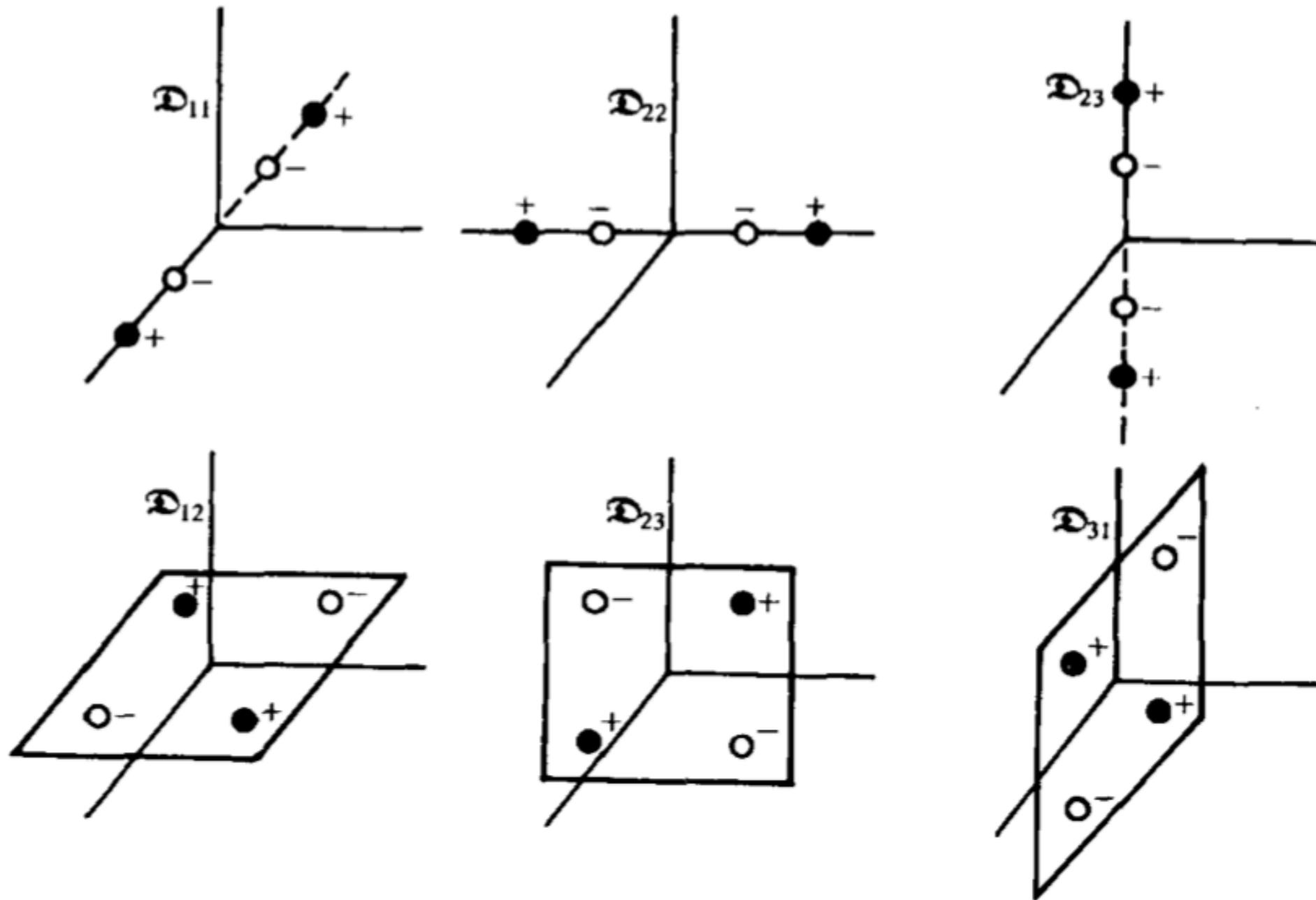


图 2-13

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

(6.15)

则(6.14)式可写为

$$\sum_{i,j} \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} = 0. \quad (6.16)$$

展开式(6.3)的第三项可以写为

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \left[ \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{x}') dV' \right] \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R}. \quad (6.17)$$

我们重新定义电四极矩张量 **配平量纲**

$$\mathcal{D}_{ij} = \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{x}') dV', \quad (6.18)$$

则势展开式的第三项仍可写为

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \sum_{i,j} \mathcal{D}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R},$$

(6.18)式定义的电四极矩张量满足关系

**与电磁场性质相关 (共形对称性)**

$$\mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{22} + \mathcal{D}_{33} = 0, \quad (6.19)$$

因而只有 5 个独立分量。以后我们将沿用定义(6.18)式,此式用并矢形式写为

$$\overleftrightarrow{\mathcal{D}} = \int (3\mathbf{x}'\mathbf{x}' - r'^2 \overleftrightarrow{\mathcal{I}}) \rho(\mathbf{x}') dV'. \quad (6.20)$$

其中  $\overleftrightarrow{\mathcal{I}}$  为单位张量。

## 静电场的Green function

e.g.

$$\varphi \sim \frac{1}{R^2}$$



$$\nabla^2 \frac{1}{R^2} \neq 0$$

$$\varphi \sim \frac{1}{R}$$



$$\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$$

$$\vec{\mathcal{D}} = \int (3\mathbf{x}'\mathbf{x}' - r'^2 \vec{\mathcal{I}}) \rho(\mathbf{x}') dV'. \quad (6.20)$$

其中  $\vec{\mathcal{I}}$  为单位张量。

若电荷分布有球对称性, 则

$$\begin{aligned} \int x'^2 \rho(\mathbf{x}') dV' &= \int y'^2 \rho(\mathbf{x}') dV' = \int z'^2 \rho(\mathbf{x}') dV' \\ &= \frac{1}{3} \int r'^2 \rho(\mathbf{x}') dV', \end{aligned}$$

因而  $\mathcal{D}_{11} = \mathcal{D}_{22} = \mathcal{D}_{33} = 0$ , 而且显然有  $\mathcal{D}_{12} = \mathcal{D}_{23} = \mathcal{D}_{31} = 0$ , 因此球对称电荷分布没有电四极矩。事实上这结果是更普遍的。球对称电荷分布的电场也是球对称的, 由高斯定理可知, 球外电场和集中于球心处的点电荷电场一致, 因此球对称电荷分布没有各级电多极矩。反之, 若电荷分布偏离球对称性, 一般就会出现电四极矩。例如沿  $z$  轴方向拉长了的旋转椭球体, 若其内电荷分布均匀, 则

$$\int 3z'^2 \rho(\mathbf{x}') dV' > \int r'^2 \rho(\mathbf{x}') dV',$$

因而出现电四极矩

$$\mathcal{Q}_{33} > 0, \quad \mathcal{Q}_{11} = \mathcal{Q}_{22} = -\frac{1}{2} \mathcal{Q}_{33} < 0.$$

电四极矩的出现标志着对球对称的偏离, 因此我们测量远场的四极势项, 就可以对电荷分布形状作出一定的推论. 在原子核物理中, 电四极矩是重要的物理量, 它反映着原子核形变的大小.

(引力的四级矩)

(星体)

**例** 均匀带电的长形旋转椭球体半长轴为  $a$ , 半短轴为  $b$ , 带总电荷  $Q$ , 求它的电四极矩和远处的电势.

**解** 取  $z$  轴为旋转轴, 椭球方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

椭球所带电荷密度为

$$\rho_0 = 3Q/4\pi ab^2.$$

由(6.18)式, 电四极矩为

$$\mathcal{D}_{ij} = \rho_0 \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) dV.$$

由对称性

$$\int xy dV = \int yz dV = \int zx dV = 0,$$

因此

$$\mathcal{D}_{12} = \mathcal{D}_{23} = \mathcal{D}_{31} = 0.$$

令  $x^2 + y^2 = s^2$ , 由对称性

$$\begin{aligned} \int x^2 dV &= \int y^2 dV = \frac{1}{2} \int s^2 dV = \frac{1}{2} \int_{-a}^a dz \int_0^{b\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}} ds \cdot 2\pi s^3 \\ &= \frac{4\pi ab^4}{15}, \end{aligned}$$



$$\int z^2 dV = \frac{4\pi a^3 b^2}{15},$$

因此

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{33} &= \rho_0 \int (3z^2 - r^2) dV = \rho_0 \int (2z^2 - 2x^2) dV \\ &= \frac{2}{5} (a^2 - b^2) Q, \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{11} = \mathcal{D}_{22} = -\frac{1}{2} \mathcal{D}_{33} = -\frac{1}{5} (a^2 - b^2) Q.$$

电四极矩产生的势为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \left( \mathcal{D}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathcal{D}_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mathcal{D}_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{1}{R} \\ &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \mathcal{D}_{33} \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{1}{R} \\ &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \frac{3}{2} \mathcal{D}_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{R} = \frac{Q}{40\pi\epsilon_0} (a^2 - b^2) \frac{3z^2 - R^2}{R^5}. \end{aligned}$$

在上面的计算中,我们用了关系式  $\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$ .

椭球的电偶极矩为零,总电荷为  $Q$ . 在远处的势准确至四极项为

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{a^2 - b^2}{10} \frac{3\cos^2\theta - 1}{R^3} \right).$$

电磁波解下面不是如此!

静电场下: 4极矩比单极矩衰减地快!

3. 电荷体系在外电场中的能量 设外电场电势为  $\varphi_e$ , 具有电荷分布  $\rho(\mathbf{x})$  的体系在外电场中的能量为

$$W = \int \rho \varphi_e dV. \quad (6.21)$$

设电荷分布于小区域内, 取区域内适当点为坐标原点, 把  $\varphi_e(\mathbf{x})$  对原点展开

$$\begin{aligned} \varphi_e(\mathbf{x}) = & \varphi_e(0) + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_e(0) \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi_e(0) + \dots, \end{aligned} \quad (6.22)$$

该电荷体系的静电势能

代入(6.21)式中得

$$\begin{aligned}
 W &= \int \rho(\mathbf{x}) \left[ \varphi_e(0) + \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_e(0) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi_e(0) + \dots \right] dV \\
 &= Q\varphi_e(0) + \sum_i p_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_e(0) + \frac{1}{6} \sum_{i,j} \mathcal{D}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi_e(0) + \dots \\
 &= Q\varphi_e(0) + \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi_e(0) + \frac{1}{6} \overleftrightarrow{\mathcal{D}} : \nabla \nabla \varphi_e(0) + \dots, \quad (6.23)
 \end{aligned}$$

式中  $Q$ ,  $\mathbf{p}$  和  $\overleftrightarrow{\mathcal{D}}$  的定义如前[(6.4), (6.5)和(6.20)式]. 上式是小区内电荷体系在外电场中的能量展开式.

展开式的第一项

$$W^{(0)} = Q\varphi_e(0) \quad (6.24)$$

是设想体系的电荷集中于原点上时在外场中的能量. 展开式的第二项

$$W^{(1)} = \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi_e(0) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_e(0) \quad (6.25)$$

是体系的电偶极矩在外电场中的能量. 由此式可求出电偶极子在外电场中所受的力  $\mathbf{F}$  和力矩  $\mathbf{L}$ ,

$$\mathbf{F} = -\nabla W^{(1)} = \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_e) = \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{E}_e \quad (6.26)$$

二项

$$W^{(1)} = \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi_e(0) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_e(0) \quad (6.25)$$

是体系的电偶极矩在外电场中的能量。由此式可求出电偶极子在外电场中所受的力  $\mathbf{F}$  和力矩  $\mathbf{L}$ ,

$$\mathbf{F} = -\nabla W^{(1)} = \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_e) = \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{E}_e \quad (6.26)$$

(见附录 I-23 式)。设  $\mathbf{p}$  与  $\mathbf{E}$  的夹角为  $\theta$ , 则力矩为

$$L_\theta = -\frac{\partial W^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (pE_e \cos \theta) = -pE_e \sin \theta.$$

计及力矩的方向, 得

$$\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_e. \quad (6.27)$$

展开式(6.23)的第三项是四极子在外电场中的能量

$$W^{(2)} = -\frac{1}{6} \overleftrightarrow{\mathcal{Q}} : \nabla \mathbf{E}_e. \quad (6.28)$$

由此式可见, 只有在非均匀场中四极子的能量才不为零。例如在分子或晶格中的原子核, 它处于周围电子所产生的非均匀电场中, 因而有不为零的四极矩能量。在不同旋转状态下原子核的四极矩